Глава V. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Принцип эквивалентности. В предыдущих главах мы рассмотрели некоторые из многочисленных попыток уточнения и обобщения закона тяготения Ньютона. Эти попытки, основанные на анализе отдельных тонких особенностей движения небесных тел или на различных общих соображениях, не привели к существенному развитию теории Ньютона. Большое значение имело обсуждение закона тяготения с точки зрения специальной теории относительности (СТО), показавшее, что при отказе от гравитационного дальнодействия точная форма закона тяготения нуждается только в небольших поправках порядка $\frac{v^2}{c^2}$. Этот важный вывод позволил найти путь для преодоления главной, принципиальной трудности классической небесной механики без существенного изменения положенного в ее основу закона Ньютона и тем самым вновь подтвердил фундаментальное значение этого закона. Новая эпоха в развитии теории гравитации началась лишь с созданием общей теории относительности (ОТО). К изложению основ этой теории мы и переходим.

В исследованиях Эйнштейна ОТО разрабатывалась как расширение СТО на основе принципа общей ковариантности. Если в СТО изучаются системы отсчета, движущиеся без ускорений и связанные между собой известным преобразованием Лоренца, то ОТО включает в рассмотрение произвольные движения систем отсчета и гравитацию, объединяя, таким образом, учение о пространстве-времени с теорией гравитационного поля.

Развитие ОТО было завершено к 1916 г. Первое систематическое изложение физических основ и математического аппарата теории содержится в известной работе Эйнштейна [1], опубликованной впервые в журнале «Annalen der Physik» и многократно переиздававшейся затем на различных языках. Распространению и развитию ОТО способствовало появление специальных монографий, среди которых в первую очередь следует назвать книги Вейля [2], Паули [3], Лауэ [4], Эддингтона [5], Толмана [6]. Из более поздних можно отметить работы Бергмана [7], Фока [8], Ландау и Лифшица [9], Петрова [10] и Синга [11].

Физической предпосылкой ОТО, составляющей ее главный эмпирический фундамент, является п р и н ц и п э к в и в а л е н тности, который мы предварительно рассмотрели в главе III. Этот принцип выражает наиболее общую и характерную особенность тяготения, отличающую его от полей другой природы.

Исходным моментом принципа эквивалентности является независимость ускорения тела от его массы в заданном гравитационном поле. Обсуждая эту закономерность, известную в механике со времени Ньютона, Эйнштейн пришел к заключению об относительности ускорений и гравитации и высказал гипотезу об эквивалентности инерции и тяготения.

Временно ограничивая наши рассуждения рамками механики Ньютона, примем гипотезу эквивалентности Эйнштейна и включим в понятие гравитационного поля не только силовое поле, обусловленное материальными массами, но также поле сил инерции, зависящее от закона движения применяемой системы отсчета. Считая, что оба вида полей имеют одинаковую физическую природу, будем в то же время учитывать различие их строения. Поле первого вида условно назовем, как это часто делают, истинным; оно не зависит от выбора системы отсчета. Поле сил инерции (например, однородное поле тяжести, поле центробежных сил и др.) будем называть кинематическим, или инерционным. Оно обладает тем свойством, что при соответствующем выборе системы отсчета напряженность во всех его точках может быть приведена к нулю *. В общем случае поле гравитации представляет собой результат сложения полей обоих указанных видов.

В случае кинематического поля гравитации можно построить систему координат, по отношению к которой свободная частица движется, как в отсутствие поля. Для поля произвольного строения это утверждение неправильно, поскольку не существует системы отсчета, позволяющей привести к нулю напряженность поля во всех точках. В общем случае указанное утверждение выполняется в бесконечно малом. В самом деле, в достаточно малой окрестности любой точки поле произвольного строения можно рассматривать как однородное, а следовательно, и как кинематическое. Поэтому *для каждой бесконечно малой области поля гравитации можно построить систему отсчета, по отношению к которой движение свободной частицы в этой области происходит, как вне поля*. В этом и заключается принцип эквивалентности в механике Ньютона. Как видим, в общем случае он имеет локальный характер и относится не к полю в целом, а к его достаточно малым пространственно-временным областям.

При обобщении принципа эквивалентности в теории относительности необходимо воспользоваться понятием четырехмерного ускорения, принятым в СТО.

* Такое поле называют иногда *имитированным*, так как его можно возбудить («имитировать») путем перехода от инерциальной системы координат к системе, движущейся с ускорением.

В механике Ньютона ускорение w в декартовых координатах находится по формуле

$$w^2 = \left(\frac{d^2x}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2y}{dt^2}\right)^2 + \left(\frac{d^2z}{dt^2}\right)^2,$$

которая дает одно и то же значение во всех инерциальных системах отсчета, связанных преобразованием Галилея. В СТО инерциальные системы отсчета связаны преобразованием Лоренца

$$x' = \frac{x - vt}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = \frac{t - \frac{v}{c^2}x}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \beta = \frac{v}{c}, \qquad (5,1,1)$$

по отношению к которому ньютоново определение ускорения, как легко убедиться, не является инвариантным.

Требованиям СТО отвечает четырехмерный вектор ускорения с компонентами

$$\frac{d^2x}{ds^2}, \quad \frac{d^2y}{ds^2}, \quad \frac{d^2z}{ds^2}, \quad \frac{d^2t}{ds^2},$$

где s — собственное время частицы, т. е. длина дуги мировой линии частицы в континууме Минковского. Элемент собственного времени в галилеевых координатах определяется квадратической формой

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + c^2dt^2, \qquad (5,1,2)$$

которой отвечает метрический тензор

$$g_{ij} = \begin{cases} -1, & i = j = 1, 2, 3; \\ c^2, & i = j = 4; \\ 0, & i \neq j. \end{cases} \qquad (5,1,3)$$

Величина четырехмерного ускорения находится по формуле

$$w^2 = g_{\alpha\beta}w^\alpha w^\beta = -\left(\frac{d^2x}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2z}{ds^2}\right)^2 + c^2\left(\frac{d^2t}{ds^2}\right)^2, \qquad (5,1,4)$$

инвариантной относительно преобразования Лоренца. Действительно, если в соотношение

$$w'^2 = -\left(\frac{d^2x'}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2y'}{ds^2}\right)^2 - \left(\frac{d^2z'}{ds^2}\right)^2 + c^2\left(\frac{d^2t'}{ds^2}\right)^2,$$

определяющее ускорение частицы в системе x', y', z', t', внести равенства

$$\frac{d^2x'}{ds^2} = \frac{\frac{d^2x}{ds^2} - v\frac{d^2t}{ds^2}}{\sqrt{1-\beta^2}}; \quad \frac{d^2y'}{ds^2} = \frac{d^2y}{ds^2};$$

$$\frac{d^2z'}{ds^2} = \frac{d^2z}{ds^2}; \quad \frac{d^2t'}{ds^2} = \frac{\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{v}{c^2}\frac{d^2x}{ds^2}}{\sqrt{1-\beta^2}},$$

непосредственно вытекающие из (5,1,1), то после необходимых упрощений получится величина, совпадающая с (5,1,4). Это значит, что во всех системах координат, переход между которыми осуществляется с помощью преобразований Лоренца, движущаяся частица имеет одно и то же четырехмерное ускорение *.

Как и в случае механики Ньютона, предположим вначале, что поле гравитации является кинематическим; оно существует в координатах x^σ, но отсутствует в системах отсчета $x^{\sigma'}$, отвечающих СТО и связанных между собой преобразованием Лоренца. Свободная частица, движущаяся в системе x^σ под действием кинематического поля, в системе $x^{\sigma'}$ перемещается, как вне поля; мы принимаем, что, в соответствии с принципом эквивалентности, четырехмерным законом ее движения являются равенства

$$\frac{d^2x'}{ds^2} = \frac{d^2y'}{ds^2} = \frac{d^2z'}{ds^2} = \frac{d^2t'}{ds^2} = 0.$$

Найдем закон движения этой частицы в произвольной системе отсчета x^σ.

Пусть в общих координатах квадратическая форма имеет вид

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}dx^\alpha dx^\beta, \tag{5,1,5}$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор, который при переходе к одной из систем $x^{\sigma'}$ принимает значения (5,1,3).

Первые производные от координат по собственному времени (т. е. по длине дуги мировой линии частицы) составляют контравариантный вектор, преобразующийся по известной формуле

$$\frac{dx^{i'}}{ds} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{dx^\alpha}{ds}.$$

Дифференцируя это равенство, имеем

$$\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} = \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\alpha}\frac{d^2x^\alpha}{ds^2}.$$

Внесем сюда соотношение

$$\frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\sigma}\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \frac{\partial x^{\alpha'}}{\partial x^\alpha}\frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta}\Gamma^{i'}_{\alpha'\beta'},$$

непосредственно вытекающее из общей формулы (4,5,7) после

* Равенство $w' = w$ получено с помощью преобразования (5,1,1), связывающего системы координат с общим направлением осей x, x', совпадающим с направлением их относительного движения. Однако это равенство сохраняется и в том случае, если оси x, x' образуют любые углы с направлением движения одной системы по отношению к другой.

соответствующей переделки индексов. При подстановке необходимо принять во внимание, что в галилеевой системе символы Кристофеля $\Gamma^{i'}_{\alpha'\beta'}$ имеют нулевые значения.

Полученное таким образом соотношение

$$\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^\sigma}\left(\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}\right)$$

выполняется при произвольном преобразовании координат. Поэтому из условия $\frac{d^2x^{i'}}{ds^2} = 0$ с необходимостью следует

$$\frac{d^2x^\sigma}{ds^2} + \Gamma^\sigma_{\alpha\beta}\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds} = 0. \qquad (5,1,6)$$

В произвольных координатах мировой линией свободной частицы, движущейся в кинематическом поле гравитации, служит геодезическая линия пространственно-временного континуума. Этот важный вывод, являющийся непосредственным следствием обобщенного принципа эквивалентности, лежит в основе релятивистского представления о гравитации. Левая часть (5,1,6) содержит четыре компоненты контравариантного вектора четырехмерного ускорения частицы. Найденный закон показывает, что в пространственно-временном континууме частица движется с нулевым ускорением; тем самым ньютоново понятие силы тяготения, действующей на частицу со стороны поля и вызывающей ее ускорение, отвергается. С точки зрения ОТО движение свободной частицы в гравитационном поле является инерциальным и его особенности обусловлены не приложенной к частице силой, а метрикой пространства-времени.

Рассмотрим теперь гравитационное поле, отличное от кинематического. Допустим, что пространственно-временной интервал, как и прежде, определяется квадратической формой (5,1,5), где $g_{\alpha\beta}$ — компоненты метрического тензора, равные произведениям соответствующих координатных векторов. В данном случае не существует системы отсчета, по отношению к которой движение свободной частицы происходило бы как в отсутствие поля. Поэтому не существует также и преобразования координат, которое позволило бы привести компоненты метрического тензора к значениям (5,1,3), отвечающим континууму Минковского. Таким образом, в случае поля гравитации произвольного строения пространственно-временной континуум не имеет эвклидовой (точнее, псевдоэвклидовой) метрики, присущей СТО. Стремясь развить теорию, пригодную для полей гравитации любого строения, необходимо, следуя Эйнштейну, принять, что пространство и время в общем случае образуют четырехмерный континуум Римана. Вырождение этого континуума в эвклидово многообразие имеет место лишь в случае кинематического поля, когда при соответствующем выборе системы отсчета общая формула (5,1,5) преобразуется в линейный элемент Минковского (5,1,2), и ОТО переходит в СТО.

Закон движения свободной частицы в форме уравнений геодезической линии (5,1,6), выведенный из принципа эквивалентности для кинематического поля, обобщается на случай поля гравитации произвольной структуры.

Пусть g_{ij} — метрический тензор пространственно-временного континуума R_4, отвечающего полю гравитации произвольного строения и имеющего риманову метрику. Выбрав какую-либо точку континуума, построим четырехмерное эвклидово многообразие E_4, соприкасающееся в этой точке с R_4. Как было показано в главе IV, 5, метрический тензор G_{ij} континуума E_4 связан в точке соприкосновения с полем тензора g_{ij} соотношениями

$$G_{ij} = g_{ij}; \quad \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k}.$$

Поэтому символы Кристофеля обоих континуумов, зависящие лишь от составляющих метрического тензора и их первых производных, в точке соприкосновения будут также одинаковыми. Отсюда вытекает, что система уравнений (5,1,6), коэффициентами которых служат символы Кристофеля, в точке соприкосновения, а следовательно, и в ее бесконечно малой окрестности представляет геодезическую линию как в римановом R_4, так и в эвклидовом E_4 континуумах. Если движение свободной частицы в континууме E_4 происходит по геодезической линии, то оно отвечает геодезической линии и в континууме R_4. Поскольку же для континуума E_4, соответствующего кинематическому полю гравитации, закон геодезической линии выведен непосредственно из принципа эквивалентности, этот закон можно считать обоснованным и для поля произвольного строения.

Следует еще раз подчеркнуть, что в конечных областях пространственно-временного континуума многообразие E_4 пригодно для описания только кинематического поля; при произвольном строении поля это многообразие можно употреблять лишь в бесконечно малом. В этом сказывается локальный характер принципа эквивалентности: *в общем случае только достаточно малые области поля гравитации тождественны кинематическим полям.* В то же время необходимо помнить, что локальность принципа эквивалентности выражает *структурные различия* между кинематическим и любым другим полем гравитации. Что же касается *физической природы,* то она одинакова для гравитационных полей произвольного строения. Эта идея Эйнштейна имеет в ОТО такое же фундаментальное значение, каким для классической теории гравитации обладала гипотеза Ньютона о тождестве тяжести и тяготения.

Пользуясь понятием о соприкасающейся эвклидовой метрике, мы имеем возможность несколько улучшить формулировку принципа эквивалентности в ОТО. С точки зрения механики, этот принцип заключается в общем случае в том, что *для бесконечно малой области пространственно-временного континуума можно построить систему отсчета, по отношению к которой свободная частица в этой области движется как в кинематическом поле гравитации.*

Многие авторы, подчеркивая локальный характер принципа эквивалентности, считают, что в ОТО он имеет ограниченное значение. Признавая важную роль принципа эквивалентности в процессе разработки ОТО, они, вместе с тем, утверждают, что после завершения ОТО этот принцип утратил свое значение и может служить только удобным вспомогательным средством при разъяснении основных положений ОТО. Еще Эддингтон писал, что «принцип эквивалентности сыграл огромную роль, давая указания при первоначальном построении обобщенной теории относительности. Теперь, когда мы достигли нового взгляда на природу мира, он сделался менее необходимым» [5].

С такой точкой зрения, получившей довольно широкое распространение, нельзя согласиться, так как открытая Эйнштейном эквивалентность инерции и тяготения составляет главную физическую предпосылку ОТО, в основу которой положены выводы небесной механики и точных экспериментов.

2. Обобщение принципа эквивалентности. Принцип эквивалентности в рассмотренной выше форме выражает свойства гравитационного поля через особенности бесконечно малых элементов движения. Однако геометрия Римана позволяет расширить формулировку этого принципа и сделать ее применимой к *конечному* движению свободной частицы в поле гравитации [12].

Математической предпосылкой такого расширения служит понятие о соприкосновении римановой и эвклидовой метрик вдоль линии. Это понятие, введенное в геометрию Е. Картаном, рассмотрено в главе IV, 5.

Пусть g_{ij} и G_{ij} — метрические тензоры риманова R_n и эвклидова E_n пространств n измерений. Пространства R_n и E_n соприкасаются вдоль заданной линии, если во всех точках этой линии выполняются соотношения

$$g_{ij} = G_{ij}, \quad \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial G_{ij}}{\partial x^k} .$$

С точностью до членов второго порядка соприкасающаяся эвклидова метрика представляет риманову в бесконечно малой окрестности линии соприкосновения.

Предположим, что в поле гравитации произвольного строения происходит движение частицы, отвечающее принципу эквивалентнос-