равномерно и прямолинейно, все явления происходят одинаково. Для неинерциальных систем отсчета принцип относительности в физическом смысле подвергается сомнению или даже отвергается; для них допускается лишь логическая относительность, которая выполняется всегда, даже в том случае, когда физической относительности нет. Отсюда следует, что разработанная Эйнштейном теория, отвечающая условию ковариантности, не должна рассматриваться как обобщение СТО и не заслуживает названия общей теории относительности, поскольку общей относительности как физического закона не существует.

Изложенная концепция значительно отличается от точки зрения Эйнштейна. Представляется неправильным противопоставлять физическую относительность логической, так как вторая является математическим выражением (хотя и не всегда достаточно полным) первой.

Основываясь на принципе эквивалентности, можно рассмотреть некоторые конкретные физические процессы, осуществимые внутри ускоренно движущихся лабораторий и протекающие по одинаковым законам. Так, маятники, установленные в земной лаборатории и в космическом корабле, колеблются по общему закону с периодами, зависящими от напряженности соответствующих гравитационных полей. В земной лаборатории напряженность поля определяется притяжением Земли и ее вращением, а в космическом корабле — притяжением окружающих небесных тел, собственным полем корабля и законом его движения. На искусственном спутнике Земли, движущемся с выключенными двигателями, колебания маятника зависят только от собственного поля тяготения спутника и от его вращения.

Эквивалентность инерции и гравитации определяет принципиальную возможность осуществить любой *механический процесс* внутри лаборатории, движущейся по произвольному закону. Распространение этой возможности на *все физические процессы* является гипотезой, выраженной в постулате о равноправности всех ускоренных систем отсчета.

Итак, общий принцип относительности вместе с содержащейся в нем гипотезой о единой природе инерции и тяготения имеет в ОТО первостепенное значение. Последовательное применение его определило пути расширения СТО, указало на необходимость привлечения римановой геометрии и привело к идее о слиянии гравитации с метрикой пространственно-временного континуума.

4. Тензор энергии-импульса. В случае кинематического поля гравитации пространственно-временной континуум имеет эвклидову метрику и допускает введение галилеевых координат, в которых основная квадратическая форма (5,1,5) принимает вид (5,1,2), соответствующий миру Минковского СТО. Если же поле гравитации

обладает более сложным строением и связано с наличием масс, то квадратическую форму (5,1,5) нельзя привести к линейному элементу СТО, и потому приходится допустить, что метрика пространственно-временного континуума является римановой.

Наличие масс вызывает отклонение метрических свойств пространства-времени от геометрии Эвклида. Отыскание связи между распределением материальных масс метрикой пространственно-временного континуума составляет главную задачу ОТО.

Распределение масс характеризуется в теории относительности при помощи так называемого тензора энергии-импульса. В СТО этот тензор определяется формулой

$$T^{ij} = \rho_0 \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds}, \tag{5,4,1}$$

где ρ_0 — собственная плотность, $\frac{dx^i}{ds}$ — компоненты четырехмерной скорости материи в применяемой системе отсчета.

Если ввести плотность ρ в данной системе отсчета, связанную с собственной плотностью известным соотношением СТО $\rho = \rho_0\left(\frac{dt}{ds}\right)^2$, то выражение для контравариантных компонент тензора энергии-импульса примет следующий вид:

$$T^{ij} = \rho \frac{dx^i}{dt} \frac{dx^j}{dt}. \tag{5,4,2}$$

Тензор T^{ij} дает достаточно подробное описание распределения масс с учетом их макроскопического движения. Последняя компонента T^{44} характеризует пространственное распределение плотности, компоненты вида T^{i4} и T^{4i} ($i = 1, 2, 3$) — распределение импульса и кинетической энергии. В *сопутствующих* координатах, принимающих участие в макроскопическом движении вещества, отличается от нуля только компонента $T^{44} = \rho_0$.

Однако во многих случаях необходимо принимать во внимание также микроскопические движения частиц вещества, от которых зависит давление в среде. В этом случае в сопутствующих координатах отличаются от нуля и остальные диагональные компоненты, равные переносу количества движения в соответствующих координатных направлениях; при равномерном распределении направлений микроскопических скоростей они имеют одинаковые значения, совпадающие с собственным давлением p_0.

Таким образом, в сопутствующих галилеевых координатах, которые мы обозначим здесь через x_σ, $\sigma = 1, \ldots 4$, можно написать

$$T^{11} = T^{22} = T^{33} = p_0; \quad T^{44} = \rho_0; \quad T^{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Составим выражение для компонент тензора энергии-импульса в произвольных координатах $x^{\sigma'}$.

Согласно закону преобразования тензора, имеем

$$T^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\beta}} T^{\alpha\beta} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\omega}} p_0 + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{4}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{4}} \rho_0, \qquad (5,4,3)$$

где через ω обозначен индекс суммирования, принимающий значения 1, 2, 3.

В системе x^{σ} компоненты метрического тензора *

$$g^{11} = g^{22} = g^{33} = -1; \quad g^{44} = 1; \quad g^{ij} = 0, \quad i \neq j.$$

Поэтому в общих координатах метрический тензор имеет компоненты

$$g^{i'j'} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\alpha}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\beta}} g^{\alpha\beta} = -\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\omega}} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{4}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{4}}.$$

Поскольку в системе x^{σ} макроскопических движений нет, должны выполняться равенства

$$\frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^2}{ds} = \frac{dx^3}{ds} = 0; \quad \frac{dx^4}{ds} = 1.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{4}} = \frac{dx^{i'}}{ds}; \quad g^{i'j'} = -\frac{\partial x^{i'}}{\partial x^{\omega}} \frac{\partial x^{j'}}{\partial x^{\omega}} + \frac{dx^{i'}}{ds} \frac{dx^{j'}}{ds}.$$

Внося эти соотношения в (5,4,3), находим

$$T^{ij} = (\rho_0 + p_0) \frac{dx^i}{ds} \frac{dx^j}{ds} - p_0 g^{ij}. \qquad (5,4,4)$$

Штрих, которым отмечались общие координаты, здесь для простоты опущен.

Определение тензора энергии-импульса в форме (5,4,4) пригодно и для римановой метрики пространственно-временного континуума, так как это определение, полученное в общих координатах СТО, непосредственно переходит в ОТО, поскольку в каждой отдельно взятой точке обе метрики с достаточной точностью совпадают.

Во многих случаях удобно пользоваться не контравариантными, а смешанными $T^i_j = g_{\alpha j} T^{\alpha i}$ или ковариантными $T_{ij} = g_{\alpha i} g_{\beta j} T^{\alpha\beta}$ компонентами тензора энергии-импульса, образованными из контравариантных компонент путем опускания индексов.

Тензор энергии-импульса удовлетворяет закону сохранения, который является релятивистским обобщением законов

* Для упрощения записи принято $x^4 = ct$.

сохранения механики Ньютона. В галилеевых координатах СТО этот закон имеет вид

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0; \quad i = 1, \ldots 4. \tag{5,4,5}$$

Приложим соотношение (5,4,5) к изолированной системе тел, расположенной в конечной области пространства. Пренебрегая микроскопическими движениями частиц вещества, воспользуемся определением (5,4,2). Обозначив декартовы составляющие скорости через u, v, w, находим $T^{4i} = \rho u, \rho v, \rho w, \rho$. Смешанные компоненты равны $T_i^4 = -\rho u, -\rho v, -\rho w, \rho$.

Окружим рассматриваемую систему какой-либо замкнутой поверхностью S таким образом, чтобы система оставалась внутри образованного ею объема V. Составим интеграл

$$P_i = \int\int\int_V T_i^4 dx^1 dx^2 dx^3. \tag{5,4,6}$$

При $i = 1, 2, 3$ этот интеграл определяет (с точностью до знака) компоненты количества движения, а при $i = 4$ равен полной массе системы. Дифференцируя (5,4,6) по времени, получим

$$\frac{dP_i}{dx^4} = \int\int\int \frac{\partial T_i^4}{\partial x^4} dx^1 dx^2 dx^3 =$$

$$= -\int\int\int \left(\frac{\partial T_i^1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_i^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_i^3}{\partial x^3} \right) dx^1 dx^2 dx^3,$$

так как в развернутой форме закон (5,4,5) имеет вид

$$\frac{\partial T_i^1}{\partial x^1} + \frac{\partial T_i^2}{\partial x^2} + \frac{\partial T_i^3}{\partial x^3} + \frac{\partial T_i^4}{\partial x^4} = 0.$$

Во всех точках граничной поверхности выполняется условие $T_i^j = 0$. Поэтому каждый из трех интегралов правой части предыдущего уравнения, например

$$\int\int\int \frac{\partial T_i^1}{\partial x^1} dx^1 dx^2 dx^3 = \int\int \Big| T_i^1 \Big|_{x^1_{(1)}}^{x^1_{(2)}} dx^2 dx^3,$$

равен нулю.

Следовательно,

$$\frac{dP_i}{dx^4} = 0. \tag{5,4,7}$$

Эти равенства выражают сохранение количества движения и полной массы системы.

Закон сохранения тензора энергии-импульса в форме (5,4,5) выполняется в галилеевых координатах. Преобразуем этот закон, перейдя к общим координатам $x^{\sigma'}$.

Согласно определению тензора, имеем

$$T_i^\alpha = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T_{i'}^{\alpha'}.$$

Дифференцируя это равенство по координате x^β, получим

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^\beta} T_{i'}^{\alpha'} + \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} T_{i'}^{\alpha'} +$$

$$+ \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial T_{i'}^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}}.$$

В галилеевых координатах, в которых компоненты метрического тензора постоянны, символы Кристофеля имеют нулевые значения. Поэтому, согласно закону преобразования символов Кристофеля (4,5,7), можно написать

$$\frac{\partial^2 x^\alpha}{\partial x^{\alpha'} \partial x^{\beta'}} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\alpha'\beta'}^{\nu'}; \quad \frac{\partial^2 x^{i'}}{\partial x^i \partial x^\beta} = -\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^i} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \Gamma_{\beta'\nu'}^{i'}.$$

Внесем эти соотношения в предыдущее равенство. После соответствующей переделки индексов суммирования получим

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} \left(\frac{\partial T_{i'}^{\alpha'}}{\partial x^{\beta'}} + \Gamma_{\beta'\nu'}^{\alpha'} T_{i'}^{\nu'} - \Gamma_{i'\beta'}^{\nu'} T_{\nu'}^{\alpha'} \right).$$

Выражение, заключенное в скобки в правой части равенства, представляет собой ковариантную производную вектора $T_{i'}^{\alpha'}$, по координате $x^{\beta'}$. В обычных обозначениях имеем

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\beta} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\beta} \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T_{i'/\beta'}^{\alpha'}.$$

Положим $\alpha = \beta$ и произведем свертывание по этому индексу; принимая во внимание очевидное соотношение

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^{\alpha'}} \frac{\partial x^{\beta'}}{\partial x^\alpha} = \delta_{\alpha'}^{\beta'},$$

находим

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial x^{i'}}{\partial x^i} T_{i'/\alpha'}^{\alpha'}.$$

Полученная формула связывает расходимость тензора энергии-импульса в галилеевых координатах с ковариантной дивергенцией этого тензора в общих координатах. Поскольку преобразование координат произвольно, из закона (5,4,5) с необходимостью следует

$$T^{\alpha}_{i/\alpha} = 0; \quad i = 1, \ldots 4. \qquad (5,4,8)$$

Штрих, которым отмечались общие координаты, опущен.

Исчезновение ковариантной расходимости тензора энергии-импульса выражает закон его сохранения в общем случае. В форме (5,4,8) этот закон применяется в ОТО также при римановой метрике пространственно-временного континуума.

5. Уравнения поля ОТО. Согласно принципу эквивалентности, геометрия пространственно-временного континуума в каждом конкретном случае должна быть выбрана таким образом, чтобы четырехмерная геодезическая линия правильно описывала движение свободной материальной точки в поле гравитации. Для реализации этой идеи необходимо найти теоретическую зависимость между метрическим полем g_{ij}, определяющим геометрию пространства-времени, и распределением масс, которыми обусловлено данное поле гравитации. Такая зависимость устанавливается в ОТО в виде уравнений гравитационного поля, составляющих основу математического аппарата этой теории.

Постараемся прежде всего сформулировать основные условия, которым должны удовлетворять уравнения поля.

В соответствии с принципом относительности, потребуем, чтобы форма уравнений поля не зависела от выбора системы координат. Этому условию общей ковариантности (назовем его условием *A*) можно удовлетворить, применяя тензорный анализ, поскольку тензорное уравнение, установленное в одной системе координат, сохраняется при переходе к любой другой системе.

Геометрия риманова пространства вполне определяется основной квадратической формой (см. главу IV). Рассматривая пространство-время как четырехмерный континуум Римана, можно описать его геометрические свойства полем метрического тензора. Распределение масс в данной системе отсчета характеризуется в ОТО тензором энергии-импульса. Поэтому уравнения поля можно искать в виде соотношений между метрическим тензором и тензором энергии-импульса (условие *B*).

Третьим условием (условием *C*) является закон сохранения тензора энергии-импульса (5,4,8), который ограничивает форму уравнений поля.

Все эти требования выражают идею о слиянии метрики с гравитацией, а также о зависимости между метрикой пространства-времени и распределением масс. Однако эти условия чрезмерно широки, поскольку они не учитывают конкретных особенностей