В ОТО обыкновенно пользуются релятивистскими единицами и поэтому уравнения поля пишут в следующем виде:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = -8\pi T_{ij}, \tag{5,5,15}$$

или

$$R_{ij} = -8\pi \left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right). \tag{5,5,16}$$

Не нарушая уравнения $X^{\alpha}_{i/\alpha} = 0$ и дополнительного требования о порядке высшей производной метрического тензора, можно прибавить к тензору Эйнштейна член вида $C_2 g_{ij}$, где C_2 — произвольная постоянная. Такое обобщение уравнений поля нетрудно также согласовать и с условием D, если постоянная C_2 будет так мала, что при переходе к первому приближению член $C_2 g_{ij}$ окажется пренебрежим. Это обобщение уравнений поля было предложено Эйнштейном в 1917 г. в связи с попыткой применить ОТО к космологии [15]. Обобщенную форму уравнений поля принято писать в виде

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = -8\pi T_{ij}. \tag{5,5,17}$$

Коэффициент Λ носит название космологической постоянной.

6. Неоднозначность уравнений поля. В предыдущем параграфе сформулированы четыре условия, которым должны удовлетворять уравнения поля. Присоединение к ним дополнительного условия, требующего, чтобы тензор X_{ij} в (5,5,3) был линейной функцией вторых производных от компонент метрического тензора и не содержал производных более высоких порядков, позволяет определить этот тензор однозначно. Единственность уравнений поля может при этом нарушаться лишь вследствие неточности определения тензора, энергии-импульса. Если же отказаться от дополнительного требования, которое не получило обоснования с физической точки зрения и выдвинуто лишь по аналогии с уравнением Пуассона, то уравнения поля ОТО оказываются неоднозначными, поскольку их нельзя вывести из условий A — D.

Точная форма уравнений поля определяется решением уравнения

$$X^{\alpha}_{i/\alpha} = 0, \tag{5,6,1}$$

где X_{ij} — искомый симметричный тензор второго порядка.

Покажем, что тензор Эйнштейна $R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R$ не является единственным решением уравнения (5,6,1). Интегрирование этого уравнения в общем виде представляет собой сложную задачу. Однако для наших целей достаточно установить существование решений, отличных от решения Эйнштейна.

Построим тензор второго порядка, называемый гамильтоновой производной от инварианта.

Пусть в какой-либо точке четырехмерного континуума заданы четыре линейных элемента с компонентами d_1x^α, d_2x^α, d_3x^α, d_4x^α. Объем, построенный на этих элементах, равен

$$dV = \varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} d_1x^\alpha d_2x^\beta d_3x^\gamma d_4x^\delta. \qquad (5,6,2)$$

Эта величина не зависит от выбора системы координат. С формальной точки зрения, инвариантность объема обусловлена тем, что выражение (5,6,2) представляет собой результат полного свертывания произведения ко- и контравариантных тензоров.

Совокупность коэффициентов $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ образует тензор Леви-Чивита, антисимметричный относительно всех пар индексов. Основная компонента этого тензора ε_{1234} равна квадратному корню из абсолютной величины определителя $g = |g_{ij}|$. Компоненты $\varepsilon_{\alpha\beta\gamma\delta}$ равны $\pm\sqrt{-g}$, если группа индексов $\alpha\beta\gamma\delta$ отличается от 1234 четным или нечетным числом перестановок соответственно, или нулю, если среди этих индексов имеются равные.

Для простоты допустим, что каждый из четырех элементов, образующих рассматриваемый объем, направлен по координатной линии, т. е.

$$d_1x^\alpha = dx^1,\ 0,\ 0,\ 0;\ \ldots\ d_4x^\alpha = 0,\ 0,\ 0,\ dx^4.$$

Формула (5,6,2) примет следующий вид:

$$dV = \varepsilon_{1234} dx^1 \ldots dx^4 = \sqrt{-g}\, d\tau,$$

где через $d\tau$ обозначено произведение четырех дифференциалов координат.

Пусть далее I — инвариант, построенный при помощи компонент метрического тензора и их производных

$$g_{ij};\ g_{ij\alpha} = \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\alpha};\quad g_{ij\alpha\beta} = \frac{\partial^2 g_{ij}}{\partial x^\alpha \partial x^\beta},\ \ldots$$

Составим интеграл $\int I\sqrt{-g}\, d\tau$, взятый по какой-либо определенной области континуума. Величина интеграла является инвариантом.

Не изменяя метрический тензор на границе области интегрирования, варьируем его внутри области путем малого преобразования координат. В результате компоненты метрического тензора и их производные в каждой внутренней точке получат приращения

$$\delta g_{ij};\ \delta g_{ij\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\delta g_{ij};\ \delta g_{ij\alpha\beta} = \frac{\partial^2}{\partial x^\alpha \partial x^\beta}\delta g_{ij},\ \ldots$$

в то время, как величина интеграла сохранит прежнее значение. Следовательно,

$$\int \frac{\partial I}{\partial g_{ij}}\delta g_{ij}\sqrt{-g}\, d\tau + \int \frac{\partial I}{\partial g_{ij\alpha}}\delta g_{ij\alpha}\sqrt{-g}\, d\tau + \cdots = 0. \qquad (5,6,3)$$

Принимая во внимание очевидное соотношение

$$\sqrt{-g}\,\frac{\partial l}{\partial g_{ij\alpha}}\,\delta g_{ij\alpha}=\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial l}{\partial g_{ij\alpha}}\,\delta g_{ij}\right)-\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial l}{\partial g_{ij\alpha}}\right)\delta g_{ij},$$

второй интеграл в (5,6,3) можно привести к следующему виду:

$$\int\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial l}{\partial g_{ij\alpha}}\,\delta g_{ij}\right)d\tau-\int\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial l}{\partial g_{ij\alpha}}\right)\delta g_{ij}d\tau.$$

Первый член этого выражения представляет собой сумму четырех интегралов, соответствующих $\alpha = 1, \ldots 4$. Каждый из них допускает непосредственное интегрирование по одной координате и исчезает вследствие условия $\delta g_{ij} = 0$ на границе. Поэтому написанное выражение сводится ко второму члену.

Аналогично, пользуясь соотношением

$$u''v=(uv)''+uv''-2(uv')',$$

можно преобразовать третий интеграл в уравнении (5,6,3), а затем и последующие.

В результате подобных преобразований получим

$$\int\left\{\frac{\partial l}{\partial g_{ij}}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(\sqrt{-g}\,\frac{\partial l}{\partial g_{ij\alpha}}\right)-\cdots\right\}\sqrt{-g}\,\delta g_{ij}d\tau=0.$$

Величины

$$H^{ij}=\frac{\partial l}{\partial g_{ij}}-\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}\left(-\sqrt{g}\,\frac{\partial l}{\partial g_{ij\alpha}}\right)-\cdots \qquad (5,6,4)$$

являются контравариантными компонентами симметричного тензора второго порядка, называемого гамильтоновой производной от инварианта l по метрическому тензору. По определению этот тензор удовлетворяет условию

$$\int H^{ij}\sqrt{-g}\;\delta g_{ij}d\tau=0. \qquad (5,6,5)$$

Рассмотрим важное свойство гамильтоновой производной.

Обозначим через δg_{ij} приращение метрического тензора, соответствующее переходу от координат x^{α} к координатам $x^{\alpha}+\delta x^{\alpha}$. Согласно закону преобразования тензора, имеем

$$g_{ij}=(g_{\alpha\beta}+\delta g_{\alpha\beta})\,\frac{\partial(x^{\alpha}+\delta x^{\alpha})}{\partial x^{i}}\,\frac{\partial x^{\beta}+\delta x^{\beta}}{\partial x^{j}}. \qquad (5,6,6)$$

Величины δg_{ij}, определяемые этими равенствами, являются разностями между компонентами метрического тензора в точках $x^{\alpha}+\delta x^{\alpha}$ и x^{α} новой и старой систем координат соответственно. Однако они отличаются от вариаций δg_{ij} в (5,6,5), поскольку последние равны разностям между новыми и старыми значениями компонент метрического тензора в точке x^{α}, так как при варьировании исходного

интеграла мы оставляли $d\tau$ неизменным. Чтобы получить приращения $\delta g_{\alpha\beta}$, содержащиеся в (5,6,6), к вариациям δg_{ij} необходимо прибавить поправку $\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^\nu}\delta x^\nu$, соответствующую переходу от x^α к $x^\alpha + \delta x^\alpha$. Таким образом, для вариаций метрического тензора мы имеем соотношения

$$g_{ij} = \left(g_{\alpha\beta} + \delta g_{\alpha\beta} + \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^\nu}\delta x^\nu\right)\frac{\partial(x^\alpha + \delta x^\alpha)}{\partial x^i}\frac{\partial(x^\beta + \delta x^\beta)}{\partial x^j}.$$

Сохраняя члены первого порядка, можно написать

$$g_{ij} = g_{\alpha\beta}\left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial \delta x^\beta}{\partial x^j} + \frac{\partial x^\beta}{\partial x^j}\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^i}\right) +$$

$$+ (\delta g_{\alpha\beta} + g_{\alpha\beta\nu}\delta x^\nu)\frac{\partial x^\alpha}{\partial x^i}\frac{\partial x^\beta}{\partial x^j}.$$

Внеся сюда $\frac{\partial x^\sigma}{\partial x^\tau} = \delta^\sigma_\tau$, получим после очевидных упрощений

$$\delta g_{ij} = -\left(g_{ij\alpha}\delta x^\alpha + g_{i\alpha}\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^j} + g_{j\alpha}\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^i}\right). \qquad (5,6,7)$$

Воспользуемся этой формулой для дальнейшего преобразования уравнения (5,6,5).

Прежде всего отметим, что вариации δg_{ij} нельзя считать независимыми; независимыми являются только вариации координат δx^α, от которых зависят величины δg_{ij}, согласно (5,6,7).

Внесем (5,6,7) в (5,6,5). Принимая во внимание симметричность гамильтоновой производной, получим

$$\int H^{ij}\sqrt{-g}\, g_{ij\alpha}\delta x^\alpha\, d\tau + 2\int H^{ij}\sqrt{-g}\, g_{i\alpha}\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^j}d\tau = 0. \qquad (5,6,8)$$

Выполним преобразование

$$\int H^{ij}\sqrt{-g}\, g_{i\alpha}\frac{\partial \delta x^\alpha}{\partial x^j}\, d\tau = \int \frac{\partial}{\partial x^j}(H^{ij}\sqrt{-g}\, g_{i\alpha}\delta x^\alpha)\, d\tau -$$

$$- \int \frac{\partial}{\partial x^j}(H^{ij}\sqrt{-g}\, g_{i\alpha})\,\delta x^\alpha\, d\tau.$$

Первый член правой части этого равенства представляет собой сумму четырех интегралов, каждый из которых допускает интегрирование по одной координате. Эти интегралы исчезают вследствие условия $\delta x^\alpha = 0$ на границе области интегрирования. Уравнение (5,6,8) принимает вид

$$\int\left\{H^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\, g_{\alpha\beta i} - 2\frac{\partial}{\partial x^\alpha}(H^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\, g_{i\beta})\right\}\delta x^i d\tau = 0$$

и, вследствие независимости вариаций координат, приводит к системе четырех равенств

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(H^{\alpha\beta}g_{i\beta}\sqrt{-g}\right)-\frac{1}{2}H^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}=0,$$

или, если ввести смешанные компоненты гамильтоновой производной,

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(H_i^\alpha\sqrt{-g}\right)-\frac{1}{2}H^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}=0. \qquad (5,6,9)$$

Согласно определению ковариантной дивергенции смешанного тензора второго порядка (4,6,7), имеем

$$H^\alpha_{i/\alpha}=\frac{\partial H_i^\alpha}{\partial x^\alpha}+\Gamma^\beta_{\alpha\beta}H_i^\alpha-\Gamma^\beta_{i\alpha}H^\alpha_\beta.$$

Внесем сюда

$$\Gamma^\beta_{\alpha\beta}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}$$

и перейдем в последнем члене от смешанных к контравариантным компонентам. Получим

$$H^\alpha_{i/\alpha}=\frac{\partial H_i^\alpha}{\partial x^\alpha}+\frac{1}{\sqrt{-g}}\,\frac{\partial\sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}H_i^\alpha-H^{\alpha\beta}\Gamma_{i\alpha,\beta}.$$

Напишем символ Кристофеля в развернутой форме и примем во внимание, что суммы

$$H^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{i\beta}}{\partial x^\alpha};\quad H^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{i\alpha}}{\partial x^\beta},$$

отличающиеся лишь обозначением немых индексов, совпадают, вследствие чего последний член правой части предыдущего уравнения приводится к следующему виду:

$$\frac{1}{2}H^{\alpha\beta}\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}.$$

Поэтому можно записать

$$H^\alpha_{i/\alpha}=\frac{1}{\sqrt{-g}}\left\{\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(H_i^\alpha\sqrt{-g}\right)-\frac{1}{2}H^{\alpha\beta}\sqrt{-g}\,\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right\}.$$

Сравнивая это выражение с соотношением (5,6,9), находим $H^\alpha_{i/\alpha}=0$.

Итак, гамильтонова производная от инварианта, образованного из компонент метрического тензора и их производных, имеет

исчезающую ковариантную расходимость. Благодаря этому свойству, она является одним из решений уравнения (5,6,1).

Поскольку с помощью метрического тензора и его производных можно построить различные инварианты, понятие гамильтоновой производной определяет различные решения ковариантного уравнения (5,6,1). К ним принадлежит, в частности, решение Эйнштейна, так как тензор $-R^{ij}+\frac{1}{2}g^{ij}R$ является гамильтоновой производной инварианта тензора Риччи.

Возвращаемся к вопросу об уравнениях поля.

Пусть H_{ij} — ковариантные компоненты гамильтоновой производной, отличной от тензора Эйнштейна. Применяя уже употреблявшееся разложение $g_{ij}=\delta_{ij}+h_{ij}$, допустим, что в первом приближении тензор H_{ij} пренебрежим, так как если он содержит члены, линейные относительно величин h_{ij}, то его можно снабдить достаточно малым постоянным множителем. Система уравнений

$$R_{ij}-\frac{1}{2}g_{ij}R+H_{ij}=-8\pi T_{ij}$$

с точки зрения условий A—D равноценна уравнениям поля в форме (5,5,14). Таким образом, отказываясь от дополнительного условия Эйнштейна о порядке высшей производной от g_{ij} в тензоре X_{ij}, мы приходим к заключению о том, что, начиная со второго приближения, уравнения поля ОТО содержат неизбежный произвол. Условия A—D не позволяют выбрать уравнения поля однозначно или установить какое-либо преимущество уравнений Эйнштейна по сравнению с другой возможной их формой. Иными словами, приходится признать, что физические предпосылки ОТО не составляют достаточной основы для однозначного развития количественной теории гравитации.

7. Другая форма уравнений поля. В некоторых случаях удобно пользоваться другой формой уравнений поля Эйнштейна, отличной от (5,5,4).

Введем скалярную функцию координат

$$L=\sqrt{g}\,g^{\sigma\tau}(\Gamma^{\beta}_{\alpha\sigma}\Gamma^{\alpha}_{\beta\tau}-\Gamma^{\alpha}_{\sigma\tau}\Gamma^{\beta}_{\alpha\beta}), \tag{5,7,1}$$

которую по аналогии с ньютоновой механикой обыкновенно называют функцией Лагранжа.

Примем также

$$q^{ij}=g^{ij}\sqrt{-g};\quad q^{ij}_{k}=\frac{\partial q^{ij}}{\partial x^{k}}. \tag{5,7,2}$$

Воспользовавшись определением символов Кристофеля, нетрудно убедиться в том, что функция Лагранжа может быть выражена через величины q^{ij} и q^{ij}_{k}. Имея это в виду, составим производные