можно написать следующее выражение для компонент тензора Эйнштейна:

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R = \left(\delta_i^\sigma \delta_j^\tau - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}\right).$$

Уравнения поля (5,5,4) принимают вид

$$\left(\delta_i^\sigma \delta_j^\tau - \frac{1}{2} g_{ij} g^{\sigma\tau}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}\right) = -8\pi T_{ij}. \qquad (5,7,7)$$

Введя инвариант тензора энергии-импульса, можно привести уравнения поля к несколько более компактной форме. С этой целью следует воспользоваться равенством (5,5,12), в котором скаляр тензора Риччи выражен через указанный инвариант. Внеся в это равенство соотношение (5,7,6), получим

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = -8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right). \qquad (5,7,8)$$

Вне масс, где тензор энергии-импульса исчезает, система уравнений поля будет следующей:

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{ij}} - \frac{\partial L}{\partial q^{ij}} = 0, \qquad (5,7,9)$$

аналогичной уравнениям Лагранжа ньютоновой механики.

В заключение мы вновь подчеркнем, что уравнения поля Эйнштейна в виде (5,5,4) или в рассмотренной выше форме (5,7,8) могут быть выведены однозначно только в том случае, если к основным условиям, сформулированным в п. 5, присоединить дополнительное требование, согласно которому эти уравнения являются линейными относительно вторых производных компонент метрического тензора и не содержат производных более высоких порядков.

Многие авторы выводят уравнения поля ОТО из вариационного принципа, аналогичного принципу наименьшего действия механики Ньютона. В математическом отношении такой вывод обладает определенными достоинствами. Однако с физической точки зрения едва ли можно признать предпочтительным, поскольку в выборе варьируемого интеграла допускают известный произвол, а принцип наименьшего действия для гравитационного поля и материи принимают в форме постулата. По мнению автора, более естественно рассматривать вариационный принцип ОТО в качестве следствия уравнений поля, подобно тому, как принцип наименьшего действия в дорелятивистской классической механике был найден в качестве следствия законов Ньютона.

8. Внешнее решение Шварцшильда. Для большинства приложений ОТО основное значение имеет решение уравнений поля, отвечающее условию сферической симметрии. Приближенное интегрирование уравнений поля для этого случая впервые выполнено в известной работе Эйнштейна о движении перигелия планеты Меркурий [16]. Вскоре Шварцшильд получил точное решение [17], которое мы здесь кратко воспроизводим.

Для пустого пространства, во всех точках которого тензор энергии-импульса тождественно равен нулю, уравнения поля (5,5,16) принимают вид

$$R_{ij} = 0. \qquad (5,8,1)$$

Допустим, что поле гравитации статическое и обусловлено материальной точкой или протяженным телом со сферическим распределением массы. Задача о внешнем поле состоит в интегрировании уравнений (5,8,1) в предположении, что искомое решение удовлетворяет центральной симметрии, на достаточно большом расстоянии соответствует теории Ньютона, а на бесконечности приводит к квадратической форме СТО, которая в сферических координатах имеет следующий вид:

$$ds^2 = -dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + dt^2. \qquad (5,8,2)$$

Тело со сферическим распределением массы, помещенное в начале координат, не нарушает условия пространственной симметрии. Поэтому можно предположить, что квадратическая форма, отвечающая искомому решению уравнений поля, такова:

$$ds^2 = -e^{\alpha} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + e^{\beta} dt^2, \qquad (5,8,3)$$

где α, β — функции одного r, которые в отсутствие тела обеспечивают переход к (5,8,2), а на бесконечности принимают нулевые значения при любой массе тела.

Требуется определить вид функций α, β, согласно уравнениям поля (5,8,1). Положим $r, \theta, \varphi, t = x^i$ при $i = 1, \ldots 4$. При этом компоненты метрического тензора будут

$$g_{11} = -e^{\alpha}; \quad g_{22} = -r^2; \quad g_{33} = -r^2 \sin^2\theta; \quad g_{44} = e^{\beta};$$
$$g_{ij} = 0, \qquad i \neq j.$$

Определитель, составленный из этих компонент, равен $g = -r^4 \sin^2\theta e^{\alpha+\beta}$, а контравариантные компоненты метрического тензора определяются формулами

$$g^{11} = -e^{-\alpha}; \quad g^{22} = -\frac{1}{r^2}; \quad g^{33} = -\frac{1}{r^2 \sin^2\theta}; \quad g^{44} = e^{-\beta};$$

$$g^{ij} = 0; \qquad i \neq j.$$

Пользуясь этими значениями, найдем компоненты тензора Риччи.

Символы Кристофеля при различных i, j, k вычисляются по формулам

$$\Gamma^i_{jk} = 0; \quad \Gamma^i_{jj} = -\frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{jj}}{\partial x^i}; \quad \Gamma^i_{ij} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^j};$$

$$\Gamma^i_{ii} = \frac{1}{2} g^{ii} \frac{\partial g_{ii}}{\partial x^i},$$

которые легко получить из (4,3,4) — (4,3,5) принимая во внимание что при $i \neq j$ в нашем случае $g_{ij} = g^{ij} = 0$.

Эти вычисления показывают, что все отличные от нуля символы Кристофеля таковы:

$$\Gamma^1_{11} = \frac{\alpha'}{2}; \quad \Gamma^2_{12} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma^3_{13} = \frac{1}{r}; \quad \Gamma^4_{14} = \frac{\beta'}{2}; \quad \Gamma^1_{22} = -re^{-\alpha};$$

$$\Gamma^3_{23} = \operatorname{ctg}\theta; \quad \Gamma^1_{33} = -r\sin^2\theta e^{-\alpha}; \quad \Gamma^2_{33} = -\sin\theta\cos\theta;$$

$$\Gamma^1_{44} = \frac{\beta'}{2} e^{\beta-\alpha}.$$

Диагональные компоненты тензора Риччи определяются соотношениями

$$R_{11} = \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r};$$

$$R_{22} = e^{-\alpha}\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - 1;$$

$$R_{33} = e^{-\alpha}\sin^2\theta\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - \sin^2\theta;$$

$$R_{44} = e^{\beta-\alpha}\left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r}\right),$$

тогда как остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Система уравнений поля сводится в данном случае к следующим трем дифференциальным уравнениям относительно функций α, β:

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = 0; \quad e^{-\alpha}\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - 1 = 0;$$

$$-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} = 0. \tag{5,8,4}$$

Первое и третье уравнения этой системы дают $\alpha + \beta = C$, где C — постоянная интегрирования.

Как указывалось, на бесконечности функции e^α, e^β приводятся к единицам; поэтому $C = 0$ и $\alpha + \beta = 0$.

Второе уравнение (5,8,4) принимает следующий вид:

$$e^{-\alpha}(1 - r\alpha') = 1$$

и после интегрирования дает $re^{-\alpha} = r + C'$, где C' — новая постоянная. Следовательно,

$$e^{\alpha} = \left(1 + \frac{C'}{r}\right)^{-1}; \quad e^{\beta} = 1 + \frac{C'}{r}.$$

Нетрудно убедиться в том, что эти функции удовлетворяют всем трем уравнениям (5,8,4).

Найдем значение постоянной C'.

Согласно условию D, в первом приближении величина $-\frac{1}{2}g_{44}$ с точностью до постоянной слагаемой должна совпадать с ньютоновым потенциалом (см. п. 5). Последний в релятивистских единицах равен $\frac{m}{r}$, где $m = \frac{\gamma M}{c^2}$. Следовательно,

$$-\frac{1}{2}\left(1 + \frac{C'}{r}\right) = \frac{m}{r} + \text{const},$$

откуда $C' = -2m$.

Окончательно можно написать

$$e^{\alpha} = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}, \quad e^{\beta} = 1 - \frac{2m}{r}. \tag{5,8,5}$$

Таким образом, квадратическая форма

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 \tag{5,8,6}$$

представляет собой решение уравнений поля, отвечающее всем поставленным условиям; оно называется внешним решением Шварцшильда.

Отметим, что в соответствии с принятым условием соотношение (5,8,6) при $r \to \infty$ стремится к линейному элементу СТО, который в сферических координатах имеет вид (5,8,2). При этом переменная r имеет нижнюю границу $2m$, поскольку при меньших значениях квадратическая форма (5,8,6) изменяет сигнатуру. Эта граница называется гравитационной сферой тела. В системе *CGS* гравитационный радиус равен

$$r_g = \frac{2\gamma M}{c^2}. \tag{5,8,7}$$

Для солнца $r_g = 2{,}9 \cdot 10^5$ *см*. Для известных в настоящее время небесных тел понятие гравитационной сферы имеет лишь формальное значение, поскольку линейные размеры тел в огромное число раз превосходят их гравитационные радиусы, вычисленные по формуле (5,8,7).

Обобщенные уравнения поля (5,5,17), дополненные космологическим членом, для пустого пространства имеют вид

$$R_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} R + \Lambda g_{ij} = 0.$$

Умножая эти уравнения на g^{ij} и выполняя свертывание, находим соотношение между инвариантом тензора Риччи и космологической постоянной $R = 4\Lambda$. Поэтому уравнения можно написать в форме

$$R_{ij} = \Lambda g_{ij}. \tag{5,8,8}$$

Сохраняя условие сферической симметрии и пользуясь полученными значениями компонент тензора Риччи, имеем, вместо (5,8,4), следующую систему уравнений:

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = -\Lambda e^{\alpha};$$

$$e^{-\alpha}\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - 1 = -\Lambda r^2;$$

$$-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} = \Lambda e^{\alpha}. \tag{5,8,9}$$

Решением этой системы, как нетрудно убедиться, являются функции

$$e^{\alpha} = \left(1 + \frac{C'}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1}, \quad e^{\beta} = C\left(1 + \frac{C'}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right).$$

Вследствие малости космологической постоянной член $\frac{1}{3}\Lambda r^2$ при не очень больших r должен быть весьма мал, и поэтому полученное решение должно совпадать с (5,8,5). Поэтому следует положить $C = 1$, $C' = -2m$. Таким образом,

$$e^{\alpha} = \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1}; \quad e^{\beta} = 1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2. \tag{5,8,10}$$

Обобщенная квадратическая форма Шварцшильда имеет вид

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 -$$

$$- r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{2m}{r} - \frac{1}{3}\Lambda r^2\right) dl^2. \tag{5,8,11}$$

В отличие от (5,8,6) решение (5,8,11) применимо к значениям переменной r, ограниченным не только нижней ($r_g \simeq 2m$), но также верхней границей. С точностью до величины порядка m последняя равна $\sqrt{3\Lambda^{-1}}$.

Отметим также, что обобщенное решение Шварцшильда в отсутствие центрального тела не переходит в квадратическую форму СТО: при $m = 0$ геометрия пространственно-временного континуума остается римановой.

9. Внутреннее решение Шварцшильда. Для приложений ОТО представляет также интерес внутреннее решение Шварцшильда [18], характеризующее поле гравитации внутри тела со сферическим распределением массы. Особенно большое значение это решение приобрело в связи с развитием теории внутреннего строения сверхплотных звезд, к которым закон тяготения Ньютона неприменим.

Рассмотрим прежде всего случай, когда сферическая конфигурация состоит из несжимаемой жидкости с постоянной собственной плотностью ρ и с давлением p, зависящим от расстояния до центра сферы.

Согласно (5,4,4), ковариантные компоненты тензора энергии-импульса определяются формулами

$$T_{ij} = (\rho + p)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}g_{\alpha i}g_{\beta j} - pg_{ij}.$$

Поскольку макроскопических движений в веществе нет и квадратическая форма, удовлетворяющая условию сферической симметрии, имеет вид (5,8,3), отличными от нуля являются лишь диагональные компоненты этого тензора

$$T_{ii} = (\rho + p)\left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2 g_{ii}^2 - pg_{ii}.$$

Четырехмерная скорость $\frac{\partial x^i}{\partial s}$ сводится к последней составляющей, которая находится из квадратической формы при $\frac{\partial x^i}{\partial s} = 0, i = 1, 2, 3$; эта составляющая равна $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{g_{44}}$. Следовательно,

$$T_{ii} = pe^\alpha,\ pr^2,\ pr^2\sin^2\theta,\ \rho e^\beta.$$

Скаляр тензора энергии-импульса вычисляется по формуле $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \rho - 3p$.

Составим уравнения поля в форме (5,5,16). С этой целью воспользуемся компонентами тензора Риччи, вычисленными в предыдущем параграфе применительно к линейному элементу (5,8,3). Выполняя соответствующие подстановки, получим систему трех уравнений

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = 4\pi e^\alpha(p - \rho);$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^\alpha}{r^2} = 4\pi e^\alpha(p - \rho);$$