Отметим также, что обобщенное решение Шварцшильда в отсутствие центрального тела не переходит в квадратическую форму СТО: при $m = 0$ геометрия пространственно-временного континуума остается римановой.

9. Внутреннее решение Шварцшильда. Для приложений ОТО представляет также интерес внутреннее решение Шварцшильда [18], характеризующее поле гравитации внутри тела со сферическим распределением массы. Особенно большое значение это решение приобрело в связи с развитием теории внутреннего строения сверхплотных звезд, к которым закон тяготения Ньютона неприменим.

Рассмотрим прежде всего случай, когда сферическая конфигурация состоит из несжимаемой жидкости с постоянной собственной плотностью ρ и с давлением p, зависящим от расстояния до центра сферы.

Согласно (5,4,4), ковариантные компоненты тензора энергии-импульса определяются формулами

$$T_{ij} = (\rho + p)\frac{dx^\alpha}{ds}\frac{dx^\beta}{ds}g_{\alpha i}g_{\beta j} - pg_{ij}.$$

Поскольку макроскопических движений в веществе нет и квадратическая форма, удовлетворяющая условию сферической симметрии, имеет вид (5,8,3), отличными от нуля являются лишь диагональные компоненты этого тензора

$$T_{ii} = (\rho + p)\left(\frac{dx^i}{ds}\right)^2 g_{ii}^2 - pg_{ii}.$$

Четырехмерная скорость $\frac{\partial x^i}{\partial s}$ сводится к последней составляющей, которая находится из квадратической формы при $\frac{\partial x^i}{\partial s} = 0$, $i = 1, 2, 3$; эта составляющая равна $\frac{dt}{ds} = \frac{1}{g_{44}}$. Следовательно,

$$T_{ii} = pe^\alpha,\ pr^2,\ pr^2\sin^2\theta,\ \rho e^\beta.$$

Скаляр тензора энергии-импульса вычисляется по формуле $T = g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta} = \rho - 3p$.

Составим уравнения поля в форме (5,5,16). С этой целью воспользуемся компонентами тензора Риччи, вычисленными в предыдущем параграфе применительно к линейному элементу (5,8,3). Выполняя соответствующие подстановки, получим систему трех уравнений

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = 4\pi e^\alpha(p - \rho);$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^\alpha}{r^2} = 4\pi e^\alpha(p - \rho);$$

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} + \frac{\beta'}{r} = 4\pi e^{\alpha}(3p + \rho).$$

Уравнения, отвечающие $i = j = 2$ и $i = j = 3$, совпадают.

Эту систему удобнее представить в несколько иной форме. Сложив первое уравнение с третьим, получим

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' - \beta'}{2r} = 8\pi p e^{\alpha}.$$

Вычитание тех же уравнений дает

$$\frac{\alpha' + \beta'}{2r} = 4\pi(p + \rho)e^{\alpha}.$$

Комбинируя это соотношение со вторым уравнением системы, находим

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta'}{r} - \frac{e^{\alpha}}{r^2} = 8\pi p e^{\alpha}; \quad -\frac{1}{r^2} + \frac{\alpha'}{r} + \frac{e^{\alpha}}{r^2} = 8\pi\rho e^{\alpha}.$$

Таким образом, систему уравнения поля можно написать следующим образом:

$$\begin{aligned} 8\pi p &= e^{-\alpha}\left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' - \beta'}{2r}\right); \\ 8\pi p &= e^{-\alpha}\left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}; \\ 8\pi\rho &= e^{-\alpha}\left(\frac{\alpha'}{r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2}. \end{aligned} \tag{5,9,1}$$

Отметим, что условие несжимаемости до сих пор не учитывалось и потому полученная система уравнений применима также к конфигурации, состоящей из сжимаемой среды.

В случае $\rho = \text{const}$, рассмотренном в упомянутой работе Шварцшильда, интегрирование системы (5,9,1) не вызывает затруднений. Последнее уравнение после умножения на r^2 принимает вид $8\pi\rho r^2 = (r - re^{-\alpha})'$ и дает

$$e^{-\alpha} = 1 - kr^2; \quad k = \frac{8}{3}\pi\rho, \tag{5,9,2}$$

так как вследствие конечности $e^{-\alpha}$ в центре сферы для постоянной интегрирования следует принять нулевое значение.

Объединяя два первые уравнения (5,9,1), имеем

$$e^{-\alpha}\left(\frac{\beta''}{2} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{2r} - \frac{1}{r^2}\right) - \alpha' e^{-\alpha}\left(\frac{\beta'}{4} + \frac{1}{2r}\right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

или, если внести найденное значение функций α,

$$\beta'' + \frac{\beta'^2}{2} - \frac{\beta'}{r(1 - kr^2)} = 0.$$

Интегрируя, получим

$$\beta' e^{\frac{\beta}{2}} = \frac{2Bkr}{\sqrt{1-kr^2}},$$

где B — произвольная постоянная.

Повторное интегрирование дает

$$e^{\beta} = (A - B\sqrt{1-kr^2})^2, \tag{5,9,3}$$

где A — новая постоянная.

Давление находится теперь с помощью второго из уравнений системы (5,9,1)

$$p = \frac{k}{8\pi}\frac{3B\sqrt{1-kr^2} - A}{A - B\sqrt{1-kr^2}}. \tag{5,9,4}$$

Постоянные интегрирования определяются по условиям на границе сферы, где внутреннее решение должно совпадать с внешним.

Согласно (5,8,5), на границе $e^{\beta} = 1 - \frac{2m}{R}$. Приняв $2m = \frac{8}{3}\pi\rho R^3 = kR^3$ и сравнивая оба решения, получим

$$1 - kR^2 = (A - B\sqrt{1-kR^2})^2.$$

Второе уравнение находится из условия $p = 0$.

$$A - 3B\sqrt{1-kR^2} = 0.$$

Совместное решение этих уравнений дает

$$A = \frac{3}{2}\sqrt{1-kR^2}; \quad B = \frac{1}{2}. \tag{5,9,5}$$

Формулы (5,9,2) — (5,9,4) вместе с (5,9,5) дают полное решение задачи.

Переходим к случаю сжимаемой сферы, когда интегрирование уравнений поля не может быть завершено без дополнительных условий.

Введем функцию

$$m(r) = 4\pi\int_0^r r^2\rho dr.$$

Последнее из уравнений (5,9,1) можно переписать так:

$$2m'(r) = 1 - (re^{-\alpha})'.$$

Это уравнение легко интегрируется и дает

$$e^{-\alpha} = 1 - \frac{2m(r)}{r},$$

так как вследствие $m(0) = 0$ постоянная интегрирования имеет нулевое значение.

Сложив второе и третье уравнения (5,9,1), находим $\alpha' + \beta' = 8\pi (p + \rho) re^{\alpha}$. Согласно внешнему решению на границе сферы, т. е. при $r = R$, должно выполняться соотношение $\alpha + \beta = 0$. Поэтому, интегрируя написанное уравнение в пределах от r до R, получим

$$\alpha + \beta = -8\pi \int_r^R (p + \rho) re^{\alpha} dr,$$

или

$$e^{\beta} = e^{-\alpha - 8\pi \int_r^R (p+\rho) r e^{\alpha} dr}$$

Итак, внутреннее решение уравнений поля для сферической конфигурации в случае сжимаемой среды имеет вид

$$e^{-\alpha} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1};$$

$$e^{\beta} = \left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right) e^{-8\pi \int_r^R (p+\rho)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} r dr}. \qquad (5,9,6)$$

Для фактического вычисления функций e^{α}, e^{β} необходимо знать распределение плотности и давления в конфигурации.

Поскольку при выводе (5,9,6) одно из уравнений системы (5,9,1) остается неиспользованным, в общем случае можно найти зависимость между давлением и плотностью в виде уравнения, которое служит релятивистским обобщением закона гидростатики механики Ньютона.

Сопоставляя первые два уравнения (5,9,1), имеем

$$e^{-\alpha}\left(\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha' + \beta'}{2r} - \frac{1}{r^2}\right) + \frac{1}{r^2} = 0,$$

или, если умножить на $\frac{2}{r}$ и выполнить соответствующие преобразования,

$$\frac{d}{dr}\left\{e^{-\alpha}\left(\frac{\beta'}{r} + \frac{1}{r^2}\right) - \frac{1}{r^2}\right\} + e^{-\alpha}\frac{\beta'(\alpha' + \beta')}{2r} = 0.$$

Вновь воспользовавшись вторым уравнением (5,9,1) и применявшимся ранее соотношением $\alpha' + \beta' = 8\pi (p + \rho) re^{\alpha}$, найдем

$$\frac{dp}{dr} + \frac{1}{2}(p + \rho)\beta' = 0.$$

Остается внести сюда значение производной β', для которой из (5,9,6) следует

$$\beta' = \frac{2m(r)}{r^2}\left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m(r)}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}.$$

Таким образом, давление и плотность в равновесной сферической конфигурации связаны уравнениями

$$\frac{dp}{dr} + \frac{m(r)\rho}{r^2}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m(r)}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} = 0; \quad (5,9,7)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Эта связь выражает в ОТО условие гидростатического равновесия рассматриваемой конфигурации. Как и в механике Ньютона, для решения уравнений равновесия требуется задать закон состояния вещества сферы в форме той или иной зависимости между давлением и плотностью.

Все вычисления были выполнены в релятивистских единицах, что позволило несколько упростить запись коэффициентов. Если перейти к системе *CGS*, которой обычно пользуются в приложениях, то уравнения (5,9,7) примут следующий вид:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\gamma M \rho}{r^2}\left(1 + \frac{p}{c^2\rho}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{c^2 M}\right)\left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right)^{-1} = 0;$$
$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (5,9,8)$$

Релятивистские поправки выражаются тремя двучленными множителями. В обычных условиях, например для Солнца и других звезд, каждый из этих множителей приводится к единице, и соотношение (5,9,8) превращается в уравнение равновесия, основанное на законе тяготения Ньютона. Даже для белых карликов с очень высокими плотностями релятивистские поправки малы. Однако для гипотетических сверхплотных звездных конфигураций они имеют весьма существенное значение.

10. Решение Эйнштейна для слабого поля. Точные решения уравнений поля удается найти только в немногих частных случаях, когда распределение масс удовлетворяет специальным условиям. При произвольном распределении масс Эйнштейн указал общий метод приближенного интегрирования этих уравнений, пригодный для достаточно слабого поля [19].

Будем считать, что пространственно-временной континуум мало отличается от метрики мира Минковского СТО. Представим компоненты метрического тензора в виде $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, допуская, что поправки h_{ij} и их производные достаточно малы. В уравнениях