Остается внести сюда значение производной β', для которой из (5,9,6) следует

$$\beta' = \frac{2m(r)}{r^2}\left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m(r)}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1}.$$

Таким образом, давление и плотность в равновесной сферической конфигурации связаны уравнениями

$$\frac{dp}{dr} + \frac{m(r)\rho}{r^2}\left(1 + \frac{p}{\rho}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{m(r)}\right)\left(1 - \frac{2m(r)}{r}\right)^{-1} = 0; \quad (5,9,7)$$

$$\frac{dm(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho.$$

Эта связь выражает в ОТО условие гидростатического равновесия рассматриваемой конфигурации. Как и в механике Ньютона, для решения уравнений равновесия требуется задать закон состояния вещества сферы в форме той или иной зависимости между давлением и плотностью.

Все вычисления были выполнены в релятивистских единицах, что позволило несколько упростить запись коэффициентов. Если перейти к системе *CGS*, которой обычно пользуются в приложениях, то уравнения (5,9,7) примут следующий вид:

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\gamma M \rho}{r^2}\left(1 + \frac{p}{c^2\rho}\right)\left(1 + \frac{4\pi r^3 p}{c^2 M}\right)\left(1 - \frac{2\gamma M}{c^2 r}\right)^{-1} = 0;$$
$$\frac{dM}{dr} = 4\pi r^2 \rho. \quad (5,9,8)$$

Релятивистские поправки выражаются тремя двучленными множителями. В обычных условиях, например для Солнца и других звезд, каждый из этих множителей приводится к единице, и соотношение (5,9,8) превращается в уравнение равновесия, основанное на законе тяготения Ньютона. Даже для белых карликов с очень высокими плотностями релятивистские поправки малы. Однако для гипотетических сверхплотных звездных конфигураций они имеют весьма существенное значение.

10. Решение Эйнштейна для слабого поля. Точные решения уравнений поля удается найти только в немногих частных случаях, когда распределение масс удовлетворяет специальным условиям. При произвольном распределении масс Эйнштейн указал общий метод приближенного интегрирования этих уравнений, пригодный для достаточно слабого поля [19].

Будем считать, что пространственно-временной континуум мало отличается от метрики мира Минковского СТО. Представим компоненты метрического тензора в виде $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, допуская, что поправки h_{ij} и их производные достаточно малы. В уравнениях

поля условимся сохранять только линейные относительно этих величин члены При сделанных предположениях уравнения поля можно привести к следующему виду (см п. 5):

$$\Box\left(h_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}h\right) = -16\pi T_{ij}, \qquad (5,10,1)$$

где

$$\Box = -\Delta + \frac{\partial^2}{\partial t^2}; \quad h = \delta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}.$$

Уравнения (5,10,1) относятся к типу Даламбера, хорошо изученному в математической физике. Применяя обычный метод интегрирования, получаем

$$h_{ij} - \frac{1}{2}\delta_{ij}h = -4\int \frac{1}{r'}\left|T_{ij}\right|_{t-r'} dx'dy'dz'. \qquad (5,10,2)$$

Это и есть решение Эйнштейна, определяющее систему величин h_{ij} в каждой пространственно-временной точке x, y, z, t. В правой части равенства интегрирование выполняется по всему пространству. При этом $r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$, $|T_{ij}|_{t-r'}$ значения компонент тензора энергии-импульса в точке x', y', z', взятые для момента $t - r'$.

В качестве иллюстрации применим решение (5,10,2) к системе тел, размеры которых малы по сравнению с расстояниями между ними. Релятивистские массы тел обозначим через m_s, их плотности — через ρ_s. Введем функцию

$$U = \sum \frac{m_s}{r_s}; \quad r_s^2 = (x - x_s)^2 + (y - y_s)^2 + (z - z_s)^2, \qquad (5,10,3)$$

которая с точностью до постоянного множителя совпадает с потенциалом поля в точке x, y, z.

В системе CGS величина U представляет собой отношение обычного ньютонова потенциала к квадрату скорости света. Будем считать ее величиной первого порядка малости. Тогда скорость, выраженная в релятивистских единицах (т. е. отношение скорости вещества к скорости света), является величиной порядка $\frac{1}{2}$.

Если искать решение уравнений поля с точностью до членов первого порядка, то в (5,10,2) можно принять $|T_{ij}|_{t-r'} = |T_{ij}|_t$, так как это упрощение повлияет лишь на члены более высоких порядков малости. По той же причине из всех компонент тензора энергии-импульса внутри тел достаточно сохранить $T^{44} = \rho_s$, положив остальные компоненты равными нулю. Единственной отличной от нуля ковариантной компонентой оказывается $T_{44} = \rho_s$.

При $i = j = 4$ правая часть соотношения (5,10,2) равна $-4\sum\frac{m_s}{r_s}$;

при других значениях i, j она исчезает. Следовательно,

$$h_{11} + \frac{1}{2} h = h_{22} + \frac{1}{2} h = h_{33} + \frac{1}{2} h = 0; \quad h_{44} - \frac{1}{2} h = -4U. \tag{5,10,4}$$

Принимая во внимание соотношение $h = -h_{11} - h_{22} - h_{33} + h_{44}$, получаем

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = -2U. \tag{5,10,5}$$

Таким образом, метрику пространственно-временного континуума, отвечающего данной системе масс, с точностью до членов первого порядка можно описать квадратической формой

$$ds^2 = -(1 + 2U)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + (1 + 2U)\, dt^2. \tag{5,10,6}$$

Если пользоваться системой единиц CGS и ввести обычный ньютонов потенциал φ, то (5,10,6) примет такой вид:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) dt^2. \tag{5,10,7}$$

В заключение следует сказать, что решением Эйнштейна во многих случаях удобнее пользоваться в несколько ином виде.

Умножив (6,9,2) на δ^{ij} и выполнив полное свертывание, получим

$$h = 4 \int \frac{1}{r'} \left| T \right|_{t-r'} dx'dy'dz',$$

где T — инвариант тензора энергии-импульса.

Следовательно, вместо (5,10,2), можно написать

$$h_{ij} = -4 \int \frac{1}{r'} \left| T_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} T \right|_{t-r'} dx'dy'dz'. \tag{5,10,8}$$

11. Решение уравнений поля для системы точечных масс. Переходим к интегрированию уравнений поля для системы точечных масс с точностью до членов второго порядка включительно. Массы материальных точек, как и прежде, обозначим через m_s. Закон движения системы, выражающий координаты точек в функциях времени $a_s = a_s(t)$, $b_s = b_s(t)$, $c_s = c_s(t)$, оставим пока неопределенным.

Материальным точкам отвечает дискретное распределение массы в пространстве. Однако мы будем рассматривать некоторое непрерывное распределение по всему пространству, заданное таким образом, чтобы при помощи соответствующего предельного перехода оно превратилось в систему точечных масс.

Введем функцию $\sigma(\alpha, \lambda)$, непрерывную и неотрицательную для всех α и λ в интервале $0 - \infty$ и при заданном λ имеющую наибольшее значение при $\alpha = 0$. Подчиним эту функцию условиям:

1) при $\alpha = 0$ $\quad \lim\limits_{\lambda \to \infty} \sigma = \infty$;

2) при $\alpha \neq 0$ $\quad \lim\limits_{\lambda \to \infty} \sigma = 0$;