при других значениях i, j она исчезает. Следовательно,

$$h_{11} + \frac{1}{2} h = h_{22} + \frac{1}{2} h = h_{33} + \frac{1}{2} h = 0; \quad h_{44} - \frac{1}{2} h = -4U. \tag{5,10,4}$$

Принимая во внимание соотношение $h = -h_{11} - h_{22} - h_{33} + h_{44}$, получаем

$$h_{11} = h_{22} = h_{33} = h_{44} = -2U. \tag{5,10,5}$$

Таким образом, метрику пространственно-временного континуума, отвечающего данной системе масс, с точностью до членов первого порядка можно описать квадратической формой

$$ds^2 = -(1 + 2U)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + (1 + 2U)\, dt^2. \tag{5,10,6}$$

Если пользоваться системой единиц CGS и ввести обычный ньютонов потенциал φ, то (5,10,6) примет такой вид:

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{2\varphi}{c^2}\right)(dx^2 + dy^2 + dz^2) + c^2\left(1 - \frac{2\varphi}{c^2}\right) dt^2. \tag{5,10,7}$$

В заключение следует сказать, что решением Эйнштейна во многих случаях удобнее пользоваться в несколько ином виде.

Умножив (6,9,2) на δ^{ij} и выполнив полное свертывание, получим

$$h = 4 \int \frac{1}{r'} \left| T \right|_{t-r'} dx'dy'dz',$$

где T — инвариант тензора энергии-импульса.

Следовательно, вместо (5,10,2), можно написать

$$h_{ij} = -4 \int \frac{1}{r'} \left| T_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} T \right|_{t-r'} dx'dy'dz'. \tag{5,10,8}$$

11. Решение уравнений поля для системы точечных масс. Переходим к интегрированию уравнений поля для системы точечных масс с точностью до членов второго порядка включительно. Массы материальных точек, как и прежде, обозначим через m_s. Закон движения системы, выражающий координаты точек в функциях времени $a_s = a_s(t)$, $b_s = b_s(t)$, $c_s = c_s(t)$, оставим пока неопределенным.

Материальным точкам отвечает дискретное распределение массы в пространстве. Однако мы будем рассматривать некоторое непрерывное распределение по всему пространству, заданное таким образом, чтобы при помощи соответствующего предельного перехода оно превратилось в систему точечных масс.

Введем функцию $\sigma(\alpha, \lambda)$, непрерывную и неотрицательную для всех α и λ в интервале $0 - \infty$ и при заданном λ имеющую наибольшее значение при $\alpha = 0$. Подчиним эту функцию условиям:

1) при $\alpha = 0$ $\quad \lim\limits_{\lambda \to \infty} \sigma = \infty$;

2) при $\alpha \neq 0$ $\quad \lim\limits_{\lambda \to \infty} \sigma = 0$;

3) при произвольном λ $4\pi \int\limits_0^\infty \alpha^2\sigma(\alpha, \lambda)\, d\alpha = 1$.

Функцию, отвечающую перечисленным требованиям, можно задать различными способами; в частности, можно положить $\sigma = \lambda^3\pi^{-3/2} e^{-\lambda^2\alpha^2}$.

Введем обозначение

$$r_s^2 = (a_s - x)^2 + (b_s - y)^2 + (c_s - z)^2$$

и примем для краткости $\sigma_s = \sigma(r_s, \lambda)$.

Функция $\rho = \Sigma m_s\sigma_s$, которую в дальнейшем мы называем плотностью, при конечном λ непрерывна во всех точках, а при $\lambda \to \infty$ соответствует системе материальных точек с координатами a_s, b_s, c_s и массами m_s. Пользуясь этим определением, составим приближенное решение уравнений поля при непрерывном распределении массы и, положив затем $\lambda \to \infty$, найдем искомое решение для системы точек.

Если ввести обозначения

$$r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2;$$

$$r_s'^2 = (x' - a_s)^2 + (y' - b_s)^2 + (z' - c_s)^2;$$

$$\sigma_s' = \sigma(r_s', \lambda)$$

и положить

$$U_s = \iiint \frac{1}{r'}\sigma_s' dx'dy'dz', \qquad (5,11,1)$$

то ньютонов потенциал масс с плотностью ρ определится формулой $U = \Sigma m_s U_s$.

Величину (5,11,1) можно рассматривать как потенциал поля, обусловленного сферическим распределением массы с плотностью σ_s', в точке, находящейся на расстоянии r_s от центра этого распределения. По отношению к массе, заключенной внутри сферы радиуса r_s, данная точка является внешней, тогда как по отношению к массе, расположенной вне указанной сферы,— внутренней. Первая масса создает в этой точке потенциал

$$\frac{4\pi}{r_s}\int\limits_0^{r_s} \alpha^2\sigma(\alpha, \lambda)\, d\alpha.$$

Потенциал, обусловленный второй массой, равен $4\pi \int\limits_{r_s}^\infty \alpha\sigma(\alpha, \lambda)\, d\alpha$.

Поэтому

$$U_s = \frac{4\pi}{r_s}\int\limits_0^{r_s} \sigma(\alpha, \lambda)\,\alpha^2 d\alpha + 4\pi \int\limits_{r_s}^\infty \sigma(\alpha, \lambda)\,\alpha d\alpha. \qquad (5,11,2)$$

Если величина λ конечна, то функция (5,11,2) непрерывна и конечна во всех точках; при $\lambda \to \infty$ она приобретает в точке a_s, b_s, c_s бесконечно большое значение. В точках, отличных от a_s, b_s, c_s, второй интеграл в (5,11,2) при $\lambda \to \infty$ исчезает, а первый стремится к $\frac{1}{v_s}$, вследствие чего $U \to \sum \frac{m_s}{r_s}$.

При произвольном λ выделим в выражении потенциала U член, отвечающий $s = k$, т. е. составим величину $U = m_k U_k + U(k)$, где $U(k) = \sum\limits_{s \neq k} m_s U_s$ представляет собой потенциал масс с плотностью $\sum\limits_{s \neq k} m_s \sigma_s$. Дифференцируя эту сумму по какой-либо координате, получим

$$\frac{\partial U}{\partial x} = m_k \frac{\partial U_k}{\partial r_k} \cdot \frac{\partial r_k}{\partial x} + \frac{\partial U(k)}{\partial x}.$$

Согласно (5,11,2),

$$\frac{\partial U_k}{\partial r_k} = -\frac{4\pi}{r_k^2} \int\limits_0^{r_k} \sigma(\alpha, \lambda)\, \alpha^2 d\alpha.$$

Поэтому при $r_k \to 0$ имеем $\frac{\partial U_k}{\partial r_k} \to 0$.

Отсюда следует, что при $x \to a_k$, $y \to b_k$, $z \to c_k$ производные от потенциала по координатам определяются формулами

$$\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_k = \frac{\partial U(k)}{\partial a_k}.$$

Заметим еще, что потенциал U и функции U_s при произвольном λ удовлетворяют уравнениям Пуассона $\Delta U = -4\pi\rho$, $\Delta U_s = -4\pi\sigma_s$, которые при $\lambda \to \infty$ переходят во внешних точках в уравнения Лапласа $\Delta U = 0$, $\Delta U_s = 0$.

В последующих вычислениях принято, что потенциал и его производные по пространственным координатам, а также компоненты ускорений $\ddot{a}_s$, $\ddot{b}_s$, $\ddot{c}_s$ являются величинами первого порядка малости, а составляющие скоростей $\dot{a}_s$, $\dot{b}_s$, $\dot{c}_s$ — величинами порядка $\frac{1}{2}$.

Как уже сказано, задача состоит в интегрировании уравнений поля с точностью до членов второго порядка включительно.

Будем пользоваться прежним разложением $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$. Члены первого порядка в диагональных элементах h_{ij} определяются формулами (5,10,5). На основании решения (5,10,2) нетрудно убедиться в том, что в элементах h_{i4} $(i \neq 4)$ содержатся члены не ниже порядка $\frac{3}{2}$, а в элементах h_{ij} $(i, j \neq 4)$ — не ниже второго. С этой

точностью указанные элементы, согласно решению Эйнштейна (5,10,2), равны:

$$h_{14} = 4\Sigma m_s \dot{a}_s U_s; \quad h_{24} = 4\Sigma m_s \dot{b}_s U_s; \quad h_{34} = \Sigma m_s \dot{c}_s U_s; \tag{5,11,3}$$
$$h_{12} = -4\Sigma m_s \dot{a}_s \dot{b}_s U_s; \quad h_{13} = -4\Sigma m_s \dot{a}_s \dot{c}_s U_s; \quad h_{23} = -4\Sigma m_s \dot{b}_s \dot{c}_s U_s.$$

Для составления уравнений поля во втором приближении необходимо найти с соответствующей точностью компоненты тензора энергии-импульса.

Введем обозначения

$$\begin{aligned}
&\bar{T}^{11} = \Sigma m_s \dot{a}_s^2 \sigma_s; \quad \bar{T}^{12} = \Sigma m_s \dot{a}_s \dot{b}_s \sigma_s; \quad \bar{T}^{13} = \Sigma m_s \dot{a}_s \dot{c}_s \sigma_s;\\
&\bar{T}^{14} = \Sigma m_s \dot{a} \sigma_s;\\
&\bar{T}^{22} = \Sigma m_s \dot{b}_s^2 \sigma_s; \quad \bar{T}^{23} = \Sigma m_s \dot{b}_s \dot{c}_s \sigma_s; \quad \bar{T}^{24} = \Sigma m_s \dot{b}_s \sigma_s;\\
&\bar{T}^{33} = \Sigma m_s \dot{c}_s^2 \sigma_s; \quad \bar{T}^{34} = \Sigma m_s \dot{c}_s \sigma_s;\\
&\bar{T}^{44} = \Sigma m_s \sigma_s
\end{aligned} \tag{5,11,4}$$

и напишем искомые компоненты в виде $T^{ij} = \bar{T}^{ij} + S^{ij}$, где S^{ij} — поправки, которые должны быть определены в согласии с законом сохранения.

Три первые компоненты ковариантной дивергенции тензора энергии-импульса

$$T^{i\alpha}_{/\alpha} = \frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} T^{i\beta} + \Gamma^i_{\alpha\beta} T^{\alpha\beta},$$

если принять во внимание значения символов Кристофеля, ограничиваясь членами первого порядка, выражаются формулами

$$T^{i\alpha}_{/\alpha} = \frac{\partial S^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \bar{T}^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial x^i}\bar{T}^{44}.$$

Вычислим первую из этих компонент. Согласно (5,11,4), имеем

$$\frac{\partial \bar{T}^{1\alpha}}{\partial x^\alpha} = \sum m_s \dot{a}_s \left(\dot{a}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial x} + \dot{b}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial y} + \dot{c}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial z} + \frac{\partial \sigma_s}{\partial t}\right) +$$
$$+ \sum m_s \ddot{a}_s \sigma_s = \sum m_s \ddot{a}_s \sigma_s,$$

так как

$$\frac{\partial \sigma_s}{\partial t} = \dot{a}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial a_s} + \dot{b}_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial b_s} + c_s \frac{\partial \sigma_s}{\partial c_s}$$

и $\frac{\partial \sigma_s}{\partial a_s} = -\frac{\partial \sigma_s}{\partial x}$ и т. д.

Далее,

$$\frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial x}\bar{T}^{44} = -\rho\frac{\partial U}{\partial x}.$$

Следовательно,

$$T^{1\alpha}_{/\alpha} = \frac{\partial S^{1\alpha}}{\partial x^\alpha} + \Sigma m_s \ddot{a}_s \sigma_s - \rho \frac{\partial U}{\partial x}.$$

Аналогичными формулами выражаются вторая и третья компоненты дивергенции.

Четвертая компонента ковариантной дивергенции находится при помощи соотношения

$$T^{4\alpha}_{/\alpha} = \frac{\partial S^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \overline{T}^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\frac{1}{2} h + h_{44}\right)\overline{T}^{4\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial h_{44}}{\partial t}\overline{T}^{44}$$

и оказывается равной

$$T^{4\alpha}_{/\alpha} = \frac{\partial S^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} - \rho \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Таким образом, закон сохранения тензора энергии-импульса приводится в нашем случае к системе четырех уравнений

$$\begin{aligned}
\frac{\partial S^{1\alpha}}{\partial x^\alpha} &= \rho \frac{\partial U}{\partial x} - \Sigma m_s \ddot{a}_s \sigma_s;\\
\frac{\partial S^{2\alpha}}{\partial x^\alpha} &= \rho \frac{\partial U}{\partial y} - \Sigma m_s \ddot{b}_s \sigma_s;\\
\frac{\partial S^{3\alpha}}{\partial x^\alpha} &= \rho \frac{\partial U}{\partial z} - \Sigma m_s \ddot{c}_s \sigma_s;\\
\frac{\partial S^{4\alpha}}{\partial x^\alpha} &= -\rho \frac{\partial U}{\partial t}.
\end{aligned} \tag{5,11,5}$$

Десять поправок S^{ij}, удовлетворяющих этой системе, можно выбрать различными способами. Положив $S^{12} = S^{13} = S^{23} = S^{44} = 0$, примем

$$\begin{aligned}
&S^{11} = \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s\right) dx; \quad S^{22} = \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial y} - \ddot{b}_s\right) dy;\\
&S^{33} = \sum m_s \int \sigma_s \left(\frac{\partial U}{\partial z} - \ddot{c}_s\right) dz; \quad S^{14} = -\sum m_s \dot{a}_s \int \rho \frac{\partial U_s}{\partial x} dx;\\
&S^{24} = -\sum m_s \dot{b}_s \int \rho \frac{\partial U_s}{\partial y} dy; \quad S^{34} = -\sum m_s \dot{c}_s \int \rho \frac{\partial U_s}{\partial z} dz.
\end{aligned} \tag{5,11,6}$$

Этими формулами и соотношениями (5,11,4) определяются контравариантные компоненты тензора энергии-импульса $T^{ij} = \overline{T}^{ij} + S^{ij}$ с нужной для наших целей точностью. Ковариантные

компоненты этого тензора легко вычислить по формулам

$$T_{ij} = (\delta_{ii}\delta_{jj} + \delta_{ii}h_{jj} + \delta_{jj}h_{ii})\,T^{ij},$$

с помощью которых с достаточной точностью получаем

$$T_{ij} = \bar{T}^{ij};\quad T_{ii} = \bar{T}^{ii} + S^{ii};\quad T_{i4} = -\bar{T}^{i4};\quad T_{44} = \bar{T}^{44} - 4\rho U, \qquad (5,11,7)$$

где i, j различные индексы, отличные от 4.

12. Уравнения поля во втором приближении. Рассматривая решение Эйнштейна, мы сохраняли в выражении тензора Риччи только линейные члены относительно поправок h_{ij} и их производных. Теперь такое представление недостаточно. Для составления уравнений поля во втором приближении необходимо аппроксимировать тензор Риччи с точностью до членов второго порядка относительно указанных величин.

Воспользуемся общей формулой для ковариантных компонент тензора Риччи (4,9,3). В соответствии с сигнатурой квадратической формы ОТО напишем эту формулу так:

$$R_{ij} = -\frac{\partial\Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\alpha i}\Gamma^{\alpha}_{\beta j} - \Gamma^{\alpha}_{ij}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Простые, но несколько громоздкие вычисления, которые мы здесь не приводим, позволяют получить следующие выражения для компонент тензора Риччи с принятой точностью:

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\Box h_{ij} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^j} - \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{\alpha j}}{\partial x^{\alpha}}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial x^{\alpha}}\right)\right] + \delta^{\alpha\alpha}\delta^{\beta\beta}\Gamma_{i\alpha,\beta}\Gamma_{j\beta,\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(h^{\alpha\beta}\Gamma_{ij,\beta}) -$$

$$- \frac{1}{2}\delta^{\alpha\alpha}\Gamma_{ij,\alpha}\frac{\partial h}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\left(H - \frac{1}{2}h^2\right), \qquad (5,12,1)$$

где $\Gamma_{ij,k}$ — символы Кристофеля первого рода, которые определяются соотношениями (4,3,4), $h^{ij} = \delta^{ii}\delta^{jj}h_{ij}$, h имеет прежнее значение, а величина H задана равенством

$$H = h_{11}(h_{22} + h_{33} - h_{44}) + h_{22}(h_{33} - h_{44}) - h_{33}h_{44} -$$

$$- h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{14}^2 + h_{24}^2 + h_{34}^2.$$

Тензор Риччи должен быть вычислен с точностью до членов второго порядка относительно потенциала, причем компонентам скоростей и ускорений следует приписать порядки $\frac{1}{2}$ и 1 соответственно.

Применяя (5,12,1), в линейных членах, которые содержат величины h_{ij}, известные нам лишь в первом приближении, сохраним обо-