компоненты этого тензора легко вычислить по формулам

$$T_{ij} = (\delta_{ii}\delta_{jj} + \delta_{ii}h_{jj} + \delta_{jj}h_{ii})T^{ij},$$

с помощью которых с достаточной точностью получаем

$$T_{ij} = \overline{T}^{ij};\ T_{ii} = \overline{T}^{ii} + S^{ii};\ T_{i4} = -\overline{T}^{i4};\ T_{44} = \overline{T}^{44} - 4\rho U, \qquad (5,11,7)$$

где i, j различные индексы, отличные от 4.

12. Уравнения поля во втором приближении. Рассматривая решение Эйнштейна, мы сохраняли в выражении тензора Риччи только линейные члены относительно поправок h_{ij} и их производных. Теперь такое представление недостаточно. Для составления уравнений поля во втором приближении необходимо аппроксимировать тензор Риччи с точностью до членов второго порядка относительно указанных величин.

Воспользуемся общей формулой для ковариантных компонент тензора Риччи (4,9,3). В соответствии с сигнатурой квадратической формы ОТО напишем эту формулу так:

$$R_{ij} = -\frac{\partial \Gamma^{\alpha}_{ij}}{\partial x^{\alpha}} + \Gamma^{\beta}_{\alpha i}\Gamma^{\alpha}_{\beta j} - \Gamma^{\alpha}_{ij}\frac{\partial \ln\sqrt{-g}}{\partial x^{\alpha}} + \frac{\partial^2 \ln\sqrt{-g}}{\partial x^i \partial x^j}.$$

Простые, но несколько громоздкие вычисления, которые мы здесь не приводим, позволяют получить следующие выражения для компонент тензора Риччи с принятой точностью:

$$R_{ij} = \frac{1}{2}\Box h_{ij} + \frac{1}{2}\left[\frac{\partial}{\partial x^i}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^j} - \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{\alpha j}}{\partial x^{\alpha}}\right) + \right.$$
$$\left. + \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i} - \delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{\alpha i}}{\partial x^{\alpha}}\right)\right] + \delta^{\alpha\alpha}\delta^{\beta\beta}\Gamma_{i\alpha,\beta}\Gamma_{j\beta,\alpha} + \frac{\partial}{\partial x^{\alpha}}(h^{\alpha\beta}\Gamma_{ij,\beta}) -$$
$$- \frac{1}{2}\delta^{\alpha\alpha}\Gamma_{ij,\alpha}\frac{\partial h}{\partial x^{\alpha}} + \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}\left(H - \frac{1}{2}h^2\right), \qquad (5,12,1)$$

где $\Gamma_{ij,k}$ — символы Кристофеля первого рода, которые определяются соотношениями (4,3,4), $h^{ij} = \delta^{ii}\delta^{jj}h_{ij}$, h имеет прежнее значение, а величина H задана равенством

$$H = h_{11}(h_{22} + h_{33} - h_{44}) + h_{22}(h_{33} - h_{44}) - h_{33}h_{44} -$$
$$- h_{12}^2 - h_{13}^2 - h_{23}^2 + h_{14}^2 + h_{24}^2 + h_{34}^2.$$

Тензор Риччи должен быть вычислен с точностью до членов второго порядка относительно потенциала, причем компонентам скоростей и ускорений следует приписать порядки $\frac{1}{2}$ и 1 соответственно.

Применяя (5,12,1), в линейных членах, которые содержат величины h_{ij}, известные нам лишь в первом приближении, сохраним обозначение h_{ij}. В остальные линейные члены внесем (5,11,3). Члены второго порядка вычислим с помощью соотношений (5,10,5).

Найдем R_{11}. Согласно (5,12,1), в эту компоненту входит сумма

$$-\delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 h_{\alpha 1}}{\partial x\,\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x\,\partial t}.$$

С помощью соотношений (5,11,3) получаем

$$\frac{\partial^2 h_{12}}{\partial x\,\partial y}+\frac{\partial^2 h_{13}}{\partial x\,\partial z}=-4\sum m_s\dot{a}_s\left(\dot{b}_s\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial y}+\dot{c}_s\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial z}\right).$$

Последний член этой суммы

$$\frac{\partial^2 h_{14}}{\partial x\,\partial t}=4\sum m_s\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+4\sum m_s\dot{a}_s\left(\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial a_s}\dot{a}_s+\right.$$

$$\left.+\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial b_s}\dot{b}_s+\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial c_s}\dot{c}_s\right)$$

приводится к величине

$$4\sum m_s\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}-4\sum m_s\dot{a}_s\left(\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}\dot{a}_s+\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial y}\dot{b}_s+\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial z}\dot{c}_s\right),$$

так как, согласно определению функции U_s, имеем $\frac{\partial U_s}{\partial a_s}=-\frac{\partial U_s}{\partial x}$ и т. д.

Следовательно,

$$-\delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial^2 h_{\alpha 1}}{\partial x\,\partial x^{\alpha}}=\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2}-4\sum m_s\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+4\sum m_s\dot{a}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}.$$

Принимая во внимание это равенство и вычисляя члены второго порядка с помощью (5,10,5), найдем

$$R_{11}=\frac{1}{2}\Box h_{11}+\frac{1}{2}\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h_{11}}{\partial x^2}+4\sum m_s\dot{a}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}-$$

$$-4\sum m_s\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}-2\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-4U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}-2(\operatorname{grad}U)^2+8\pi\rho U. \tag{5,12,2}$$

По аналогии легко написать выражения для R_{22}, R_{33}.

Положив $i=j=4$, найдем последнюю из диагональных компонент тензора Риччи

$$R_{44}=\frac{1}{2}\Box h_{44}+2(\operatorname{grad}U)^2+8\pi\rho U. \tag{5,12,3}$$

Из компонент, соответствующих различным индексам, отличающимся от четырех, приведем

$$R_{12}=\frac{1}{2}\Box h_{12}+\frac{\partial^2}{2\partial x\,\partial y}(h+h_{11}+h_{22})+2\sum m_s(\dot a_s^2+\dot b_s^2)\cdot\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial y}-$$
$$-2\sum m_s\left(\ddot a_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot b_s\frac{\partial U_s}{\partial x}\right)-2\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}-4U\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}. \quad (5,12,4)$$

Аналогичными формулами определяются R_{23}, R_{31}.

При $i=1$, $j=4$ получаем

$$R_{14}=\frac{1}{2}\Box h_{14}+$$
$$+\frac{\partial}{2\partial x}\left(\frac{\partial h}{\partial t}-\frac{\partial h_{44}}{\partial t}+\frac{\partial h_{14}}{\partial x}+\frac{\partial h_{24}}{\partial y}+\frac{\partial h_{34}}{\partial z}\right). \quad (5,12,5)$$

Нетрудно составить аналогичные выражения для R_{24}, R_{34}.

Инвариант тензора Риччи в том же приближении вычисляется по формуле $R=g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta}=(\delta^{\alpha\alpha}-h_{\alpha\alpha})\,R_{\alpha\alpha}$.

$$R=\frac{1}{2}\Box h-\frac{\partial^2}{2\partial x^2}(h+h_{11})-\frac{\partial^2}{2\partial y^2}(h+h_{22})-\frac{\partial^2}{2\partial z^2}(h+h_{33})-$$
$$-4\sum m_s\left(\dot a_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}+\dot b_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2}+\dot c_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}\right)+$$
$$+4\sum m_s\left(\ddot a_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+\ddot b_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot c_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right)+10(\operatorname{grad}U)^2-64\pi\rho U. \quad (5,12,6)$$

Теперь в нашем распоряжении имеются все величины, необходимые для составления уравнений поля в развернутой форме. Каждому из них припишем для удобства двузначный номер, отвечающий индексам i, j. Соответствующие алгебраические преобразования не представляют никаких трудностей. Опуская эти преобразования, напишем некоторые из уравнений, сохранив для тензора энергии-импульса обозначение (5,11,7).

Уравнение 11 имеет вид

$$\Box\left(h_{11}+\frac{1}{2}h\right)+\frac{\partial^2}{2\partial x^2}(h+2h_{11})-\frac{\partial^2}{2\partial y^2}(h+2h_{22})-$$
$$-\frac{\partial^2}{2\partial z^2}(h+2h_{33})-4\sum m_s\left(-\dot a_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}+\dot b_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2}+\dot c_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}\right)+$$
$$+4\sum m_s\left(-\ddot a_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+\ddot b_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot c_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right)-4\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-$$
$$-8U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+6(\operatorname{grad}U)^2-32\pi\rho U=-16\pi(\bar T^{11}+S^{11}). \quad (5,12,7)$$

По аналогии легко написать уравнения 22 и 33.

Уравнение 44 получим в следующей форме:

$$\square\left(h_{44}-\frac{1}{2}h\right)+\frac{\partial^2}{2\partial x^2}(h+2h_{11})+\frac{\partial^2}{2\partial y^2}(h+2h_{22})+$$
$$+\frac{\partial^2}{2\partial z^2}(h+2h_{33})+4\sum m_s\left(\dot a_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}+\dot b_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2}+\dot c_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}\right)-$$
$$-4\sum m_s\left(\ddot a_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+\ddot b_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot c_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right)-6(\operatorname{grad}U)^2=$$
$$=-16\pi(\bar T^{44}+2\rho U). \qquad (5,12,8)$$

Из трех уравнений с различными индексами, отличающимися от четырех, укажем уравнение 12:

$$\square h_{12}+\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(h+h_{11}+h_{22})+4\sum m_s(\dot a_s^2+\dot b_s^2)\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial y}-$$
$$-4\sum m_s\left(\ddot a_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot b_s\frac{\partial U_s}{\partial x}\right)-4\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}-$$
$$-8U\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=-16\pi\bar T_{12}. \qquad (5,12,9)$$

Остальные три уравнения отвечают $i\neq 4$, $j=4$; из них напишем уравнение 14:

$$\square h_{14}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial h_{14}}{\partial x}+\frac{\partial h_{24}}{\partial y}+\frac{\partial h_{34}}{\partial z}+\frac{\partial h}{\partial t}\right)=16\pi\bar T^{44}. \qquad (5,12,10)$$

Всего имеется десять довольно сложных дифференциальных уравнений.

Искомые функции представим в следующем виде:

$$h_{ij}=\bar h_{ij}+k_{ij}, \qquad (5,12,11)$$

подчинив $\bar h_{ij}$ системе уравнений

$$\square\left(\bar h_{ij}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\bar h\right)=-16\pi\delta_{ii}\delta_{jj}\bar T^{ij}, \qquad (5,12,12)$$

где принято $\bar h=\delta^{\alpha\beta}\bar h_{\alpha\beta}$.

Поправки k_{ij} должны удовлетворять системе десяти дифференциальных уравнений. Как и прежде, напишем четыре уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33}-k_{44})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{22}-k_{44})+\frac{\partial^2}{2\partial x^2}(\bar h+2\bar h_{11})-\frac{\partial^2}{2\partial y^2}(\bar h+2\bar h_{22})-$$
$$-\frac{\partial^2}{2\partial z^2}(\bar h+2\bar h_{33})-4\sum m_s\left(-\dot a_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}+\dot b_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2}+\dot c_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}\right)+$$
$$+4\sum m_s\left(-\ddot a_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+\ddot b_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot c_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right)-4\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2-$$
$$-8U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2}+6(\operatorname{grad}U)^2-32\pi\rho U=-16\pi S^{11}; \qquad (5,12,13)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_{22}+k_{33})-\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33}+k_{11})-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{11}+k_{22})+$$

$$+\frac{\partial^2}{2\partial x^2}(\bar{h}+2\bar{h}_{11})+\frac{\partial^2}{2\partial y^2}(\bar{h}+2\bar{h}_{22})+\frac{\partial^2}{2\partial z^2}(\bar{h}+2\bar{h}_{33})+$$

$$+\sum m_s\left(\dot{a}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}+\dot{b}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2}+\dot{c}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}\right)-4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+\ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\ddot{c}_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right)-6\,(\operatorname{grad} U)^2=-32\pi\rho U; \qquad (5,12,14)$$

$$-\Delta k_{12}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(k_{44}-k_{33})+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\bar{h}_{44}-\bar{h}_{33})+4\sum m_s(\dot{a}_s^2+\dot{b}_s^2)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial y}-4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}\right)-4\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}-8U\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=0;$$
$$(5,12,15)$$

$$-\Delta k_{14}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x}+\frac{\partial k_{24}}{\partial y}+\frac{\partial k_{34}}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{h}_{14}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{h}_{24}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{h}_{34}}{\partial z}+\frac{d\bar{h}}{dt}-\frac{\partial\bar{h}_{44}}{\partial t}\right)=0. \qquad (5,12,16)$$

Шесть из этих уравнений, которые здесь не приводятся, распадаются на группы по два, аналогичные написанным выше четырем уравнениям соответственно.

13. Определение величин $\bar{h}_{ij}$. Величины $\bar{h}_{ij}$ удовлетворяют системе уравнений (5,12,12), решение которых имеет вид

$$\bar{h}_{ij}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\bar{h}=-4\delta_{ii}\delta_{jj}\int\frac{1}{r'}\,|\bar{T}^{ij}|d\tau'_{t-r'}, \qquad (5,13,1)$$

где $d\tau'=dx'dy'dz'$, и интегрирование осуществляется по всему пространству. Выражение $|\bar{T}^{ij}|_{t-r'}$ представляет собой значение $\bar{T}_{ij}$ в точке x', y', z', взятое для момента $t-r'$. Переменная r' определяется соотношением

$$r'^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

и в первом приближении равна расстоянию между элементом объема $d\tau'$, помещенным в точке x', y', z', и точкой x, y, z, для которой ищутся значения $\bar{h}_{ij}$ в момент времени t. Разность $t-r'$ (в системе CGS она равна $t-\frac{r'}{c}$, где c — скорость света) показывает, что $\bar{T}^{ij}$ на метрический тензор влияет с запаздыванием, равным времени распространения света на расстояние r'. При этом для $\bar{T}^{ij}$ с квадратической зависимостью от скоростей запаздыванием можно пренебречь, так как в выражении $\bar{h}_{ij}$ учет запаздывания не изменит членов