$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_{22}+k_{33})-\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33}+k_{11})-\frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{11}+k_{22})+$$

$$+\frac{\partial^2}{2\partial x^2}(\bar{h}+2\bar{h}_{11})+\frac{\partial^2}{2\partial y^2}(\bar{h}+2\bar{h}_{22})+\frac{\partial^2}{2\partial z^2}(\bar{h}+2\bar{h}_{33})+$$

$$+\sum m_s\left(\dot{a}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2}+\dot{b}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2}+\dot{c}_s^2\frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2}\right)-4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}+\ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\right.$$

$$\left.+\ddot{c}_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right)-6\,(\operatorname{grad}U)^2=-32\pi\rho U; \qquad (5,12,14)$$

$$-\Delta k_{12}+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(k_{44}-k_{33})+\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(\bar{h}_{44}-\bar{h}_{33})+4\sum m_s(\dot{a}_s^2+\dot{b}_s^2)\times$$

$$\times\frac{\partial^2 U_s}{\partial x\,\partial y}-4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial y}+\ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}\right)-4\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}-8U\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y}=0; \qquad (5,12,15)$$

$$-\Delta k_{14}+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x}+\frac{\partial k_{24}}{\partial y}+\frac{\partial k_{34}}{\partial z}\right)+$$

$$+\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial\bar{h}_{14}}{\partial x}+\frac{\partial\bar{h}_{24}}{\partial y}+\frac{\partial\bar{h}_{34}}{\partial z}+\frac{d\bar{h}}{dt}-\frac{\partial\bar{h}_{44}}{\partial t}\right)=0. \qquad (5,12,16)$$

Шесть из этих уравнений, которые здесь не приводятся, распадаются на группы по два, аналогичные написанным выше четырем уравнениям соответственно.

13. Определение величин $\bar{h}_{ij}$. Величины $\bar{h}_{ij}$ удовлетворяют системе уравнений (5,12,12), решение которых имеет вид

$$\bar{h}_{ij}-\frac{1}{2}\delta_{ij}\bar{h}=-4\delta_{ii}\delta_{jj}\int\frac{1}{r'}\,|\bar{T}^{ij}|d\tau'_{t-r'}, \qquad (5,13,1)$$

где $d\tau'=dx'dy'dz'$, и интегрирование осуществляется по всему пространству. Выражение $|\bar{T}^{ij}|_{t-r'}$ представляет собой значение $\bar{T}_{ij}$ в точке x', y', z', взятое для момента $t-r'$. Переменная r' определяется соотношением

$$r'^2=(x-x')^2+(y-y')^2+(z-z')^2$$

и в первом приближении равна расстоянию между элементом объема $d\tau'$, помещенным в точке x', y', z', и точкой x, y, z, для которой ищутся значения $\bar{h}_{ij}$ в момент времени t. Разность $t-r'$ (в системе CGS она равна $t-\frac{r'}{c}$, где c — скорость света) показывает, что $\bar{T}^{ij}$ на метрический тензор влияет с запаздыванием, равным времени распространения света на расстояние r'. При этом для $\bar{T}^{ij}$ с квадратической зависимостью от скоростей запаздыванием можно пренебречь, так как в выражении $\bar{h}_{ij}$ учет запаздывания не изменит членов уравнения до второго порядка включительно. В величинах $\overline{T}^{i4}$ ($i = 1, \dots 4$) запаздыванием пренебречь нельзя.

Положив в (5,13,1) $i = j = 1, \dots 4$, получим

$$\overline{h}_{11} + \frac{1}{2}\overline{h} = -4\sum m_s\dot{a}_s^2 U_s; \qquad \overline{h}_{22} + \frac{1}{2}\overline{h} = -4\sum m_s\dot{b}_s^2 U_s;$$

$$\overline{h}_{33} + \frac{1}{2}\overline{h} = -4\sum m_s\dot{c}_s^2 U_s; \qquad \overline{h}_{44} - \frac{1}{2}\overline{h} =$$

$$= -4\sum m_s \int \frac{1}{r'}\sigma_s'(t - r')\,d\tau',$$

где через $\sigma_s'(t - r')$ обозначено σ_s', в котором a_s, b_s, c_s взяты для момента $t - r'$.

Комбинируя эти равенства, имеем

$$\overline{h} = 4\sum m_s \int \frac{1}{r'}\,\sigma_s'(t - r')\,d\tau' - 4\sum m_s v_s^2 U_s,$$

где принято $v_s^2 = \dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2 + \dot{c}_s^2$.

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\overline{h}_{11} &= -2\sum m_s \int \frac{1}{r'}\,\sigma_s'(t - r')\,d\tau' + 2\sum m_s(v_s^2 - 2\dot{a}_s^2)\,U_s;\\
\overline{h}_{22} &= -2\sum m_s \int \frac{1}{r'}\,\sigma_s'(t - r')\,d\tau' + 2\sum m_s(v_s^2 - 2\dot{b}_s^2)\,U_s;\\
\overline{h}_{33} &= -2\sum m_s \int \frac{1}{r'}\,\sigma_s'(t - r')\,d\tau' + 2\sum m_s(v_s^2 - 2\dot{c}_s^2)\,U_s;\\
\overline{h}_{44} &= -2\sum m_s \int \frac{1}{r'}\,\sigma_s'(t - r')\,d\tau' - 2\sum m_s v_s^2 U_s.
\end{aligned} \qquad (5,13,2)$$

Для дальнейшего удобно преобразовать интеграл, входящий в написанные формулы.

Введем новые переменные u, v, w при помощи соотношений

$$x' - a_s(t - r') = u; \quad y' - b_s(t - r') = v; \quad z' - c_s(t - r') = w.$$

В этих переменных функция $\sigma'_s(t - r')$ имеет вид $\sigma(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \lambda)$. Якобиан преобразования представляет собой определитель, обратный определителю

$$\begin{vmatrix}
\frac{\partial u}{\partial x'} & \frac{\partial v}{\partial x'} & \frac{\partial w}{\partial x'}\\
\frac{\partial u}{\partial y'} & \frac{\partial v}{\partial y'} & \frac{\partial w}{\partial y'}\\
\frac{\partial u}{\partial z'} & \frac{\partial v}{\partial z'} & \frac{\partial w}{\partial z'}
\end{vmatrix}.$$

Вычисление дает для якобиана выражение

$$I_s = \left(1 + \frac{da_s}{d\theta}\frac{\partial r'}{\partial x'} + \frac{db_s}{d\theta}\frac{\partial r'}{\partial y'} + \frac{dc_s}{d\theta}\frac{\partial r'}{\partial z'}\right)^{-1}; \quad \theta = t - r',$$

которое при $u = v = w = 0$ приводится к величине

$$I_s = \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial\theta}\right)^{-1},$$

где r_s определяется соотношением

$$r_s^2 = [x - a_s(\theta)]^2 + [y - b_s(\theta)]^2 + [z - c_s(\theta)]^2; \quad \theta = t - r_s. \quad (5,13,3)$$

В результате указанного преобразования интеграл, содержащийся в (5,13,2), принимает вид

$$\iiint \frac{1}{r'}\sigma\left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2},\ \lambda\right) I_s du dv dw$$

и при достаточно большом λ может быть заменен следующим:

$$\frac{1}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial\theta}\right)^{-1} \iiint \sigma\left(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2},\ \lambda\right) du dv dw.$$

Если снова заменить переменные

$$u = \alpha \sin\psi \cos\varphi; \quad v = \alpha \sin\psi \sin\varphi; \quad w = \alpha\cos\psi$$

и выполнить интегрирование по Ψ и φ, то получится

$$\frac{4\pi}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial\theta}\right)^{-1} \int_0^\infty \sigma(\alpha,\ \lambda)\,\alpha^2 d\alpha,$$

или, согласно определению функции σ,

$$\frac{1}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial\theta}\right)^{-1}.$$

Таким образом, при $\lambda \to \infty$ имеем

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{11} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial\theta}\right)^{-1} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}(v_s^2 - 2\dot{a}_s^2);\\
\bar{h}_{22} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial)}\right)^{-1} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}(v_s^2 - 2\dot{b}_s^2);\\
\bar{h}_{33} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial\theta}\right)^{-1} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}(v_s^2 - 2\dot{c}_s^2);\\
\bar{h}_{44} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial\theta}\right)^{-1} - 2\sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}.
\end{aligned} \quad (5,13,4)$$

В первых членах правых частей этих равенств величина r_s определяется соотношением (5,13,3) с учетом запаздывания. Во вторых членах, пренебрегая запаздыванием, можно принять

$$r_s^2 = [x - a_s(t)]^2 + [y - b_s(t)]^2 + [z - c_s(t)]^2. \quad (5,13,5)$$

Остается определить $\bar{h}_{ij}$ с различными индексами.

Положив в (5,13,1) $i = 1$, $j = 4$, найдем

$$\bar{h}_{14} = 4\sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma_s'(t - r')\,\dot{a}_s(t - r')\,d\tau'.$$

Если преобразовать переменные как прежде и положить затем $\lambda \to \infty$, то получится

$$\bar{h}_{14} = 4\sum \frac{m_s \dot{a}_s(\theta)}{r_s(\theta)}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1}. \quad (5,13,6)$$

Мы не приводим здесь формулы для $\bar{h}_{24}$ и $\bar{h}_{34}$; их легко написать по аналогии.

Допустим, что индексы i, j различны и отличаются от четырех. Принимая $i = 1$, $j = 2$, найдем

$$\bar{h}_{12} = -4\sum m_s \dot{a}_s \dot{b}_s U_s,$$

или, после перехода к пределу при $\lambda \to \infty$,

$$\bar{h}_{12} = -4\sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}, \quad (5,13,7)$$

где r_s определяется формулой (5,13,5).

Аналогичные выражения можно написать для величин $\bar{h}_{23}$ и $\bar{h}_{31}$.

Полезно преобразовать найденные значения $\bar{h}_{ij}$, исключив из них r_s, определяемые с учетом запаздывания соотношениями (5,13 3), и введя величины, отвечающие положениям материальных точек в данный момент времени, согласно (5,13,5).

Выполним разложение

$$\frac{1}{r_s(\theta)}\left(1 + \frac{\partial r_s(\theta)}{\partial \theta}\right)^{-1} = \frac{1}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\}.$$

Выражения для диагональных элементов примут следующий вид:

$$\begin{aligned}
\bar{h}_{11} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}(v_s^2 - 2\dot{a}_s^2);\\
\bar{h}_{22} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}(v_s^2 - 2\dot{b}_s^2);\\
\bar{h}_{33} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}(v_s^2 - 2\dot{c}_s^2);\\
\bar{h}_{44} &= -2\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} - 2\sum \frac{m_s v_s^2}{v_s}.
\end{aligned} \quad (5,13,8)$$

Величина $\bar{h}$, как легко убедиться, такова:

$$\bar{h} = 4\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} - 4\sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \qquad (5,13,9)$$

Остальные элементы с точностью до членов второго порядка включительно определяются формулами вида

$$\bar{h}_{14} = 4\sum \frac{m_s \dot{a}_s}{r_s}; \quad \bar{h}_{12} = -4\sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}. \qquad (5,13,10)$$

14. Определение величин k_{ij}. Для завершения интегрирования уравнений поля необходимо найти поправки k_{ij}, удовлетворяющие системе уравнений, составленной в п. 12.

Рассмотрим прежде всего три уравнения вида (5,12,16), содержащие k_{i4}. Воспользовавшись значениями (5,13,8)—(5,13,10), легко убедиться в том, что в нашем приближении эти уравнения сводятся к соотношениям

$$-\Delta k_{14} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z}\right) = 0 \text{ и т. д.}$$

Поскольку указанных поправок в других уравнениях нет, можно положить $k_{14} = k_{24} = k_{34} = 0$. Примем далее $k_{12} = k_{23} = k_{31} = 0$ и покажем, что остальные уравнения можно удовлетворить с помощью четырех величин k_{ii}.

Найденное ранее решение (5,13,2) позволяет переписать уравнение (5,12,13) следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{22} - k_{44}) + 4\sum m_s\left(-\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x} + \right.$$
$$\left. + \ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right) - 4\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - 8U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6(\operatorname{grad} U)^2 -$$
$$-32\pi\rho U = -16\pi S^{11}. \qquad (5,14,1)$$

Вместо (5,12,14) имеем теперь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{11} + k_{22}) +$$
$$+ 4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right) + 6(\operatorname{grad} U)^2 = 32\pi\rho U. \qquad (5,14,2)$$

Уравнение (5,12,15) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(k_{44} - k_{33}) - 4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}\right) -$$
$$-4\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} - 8U\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = 0. \qquad (5,14,3)$$