

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) - \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) - \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}) + \\ & + \frac{\partial^2}{2\partial x^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{11}) + \frac{\partial^2}{2\partial y^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{22}) + \frac{\partial^2}{2\partial z^2} (\bar{h} + 2\bar{h}_{33}) + \\ & + \sum m_s \left(\dot{a}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial x^2} + \dot{b}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial y^2} + \dot{c}_s^2 \frac{\partial^2 U_s}{\partial z^2} \right) - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \right. \\ & \left. + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 6 (\text{grad } U)^2 = -32\pi\rho U; \quad (5,12,14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \Delta k_{12} + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (k_{44} - k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (\bar{h}_{44} - \bar{h}_{33}) + 4 \sum m_s (\dot{a}_s^2 + \dot{b}_s^2) \times \\ & \times \frac{\partial^2 U_s}{\partial x \partial y} - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0; \quad (5,12,15) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & - \Delta k_{14} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z} \right) + \\ & + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \bar{h}_{14}}{\partial x} + \frac{\partial \bar{h}_{24}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{h}_{34}}{\partial z} + \frac{d\bar{h}}{dt} - \frac{\partial \bar{h}_{44}}{\partial t} \right) = 0. \quad (5,12,16) \end{aligned}$$

Шесть из этих уравнений, которые здесь не приводятся, распадаются на группы по два, аналогичные написанным выше четырем уравнениям соответственно.

13. Определение величин \bar{h}_{ij} . Величины \bar{h}_{ij} удовлетворяют системе уравнений (5,12,12), решение которых имеет вид

$$\bar{h}_{ij} - \frac{1}{2} \delta_{ij} \bar{h} = -4\delta_{ij} \delta_{jl} \int \frac{1}{r'} |\bar{T}^{il}| d\tau'_{t-r'}, \quad (5,13,1)$$

где $d\tau' = dx' dy' dz'$, и интегрирование осуществляется по всему пространству. Выражение $|\bar{T}^{ij}|_{t-r'}$ представляет собой значение \bar{T}_{ij} в точке x', y', z' , взятое для момента $t - r'$. Переменная r' определяется соотношением

$$r'^2 = (x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2$$

и в первом приближении равна расстоянию между элементом объема $d\tau'$, помещенным в точке x', y', z' , и точкой x, y, z , для которой ищутся значения \bar{h}_{ij} в момент времени t . Разность $t - r'$ (в системе CGS она равна $t - \frac{r'}{c}$, где c — скорость света) показывает, что \bar{T}^{ij} на метрический тензор влияет с запаздыванием, равным времени распространения света на расстояние r' . При этом для \bar{T}^{ij} с квадратической зависимостью от скоростей запаздыванием можно пренебречь, так как в выражении \bar{h}_{ij} учет запаздывания не изменит членов

уравнения до второго порядка включительно. В величинах \bar{T}^{i4} ($i = 1, \dots, 4$) запаздыванием пренебречь нельзя.

Положив в (5,13,1) $i = j = 1, \dots, 4$, получим

$$\bar{h}_{11} + \frac{1}{2} \bar{h} = -4 \sum m_s a_s^2 U_s; \quad \bar{h}_{22} + \frac{1}{2} \bar{h} = -4 \sum m_s b_s^2 U_s;$$

$$\bar{h}_{33} + \frac{1}{2} \bar{h} = -4 \sum m_s c_s^2 U_s; \quad \bar{h}_{44} - \frac{1}{2} \bar{h} =$$

$$= -4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau',$$

где через $\sigma'_s(t-r')$ обозначено σ'_s , в котором a_s, b_s, c_s взяты для момента $t-r'$.

Комбинируя эти равенства, имеем

$$\bar{h} = 4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' - 4 \sum m_s v_s^2 U_s,$$

где принято $v_s^2 = a_s^2 + b_s^2 + c_s^2$.

Следовательно,

$$\bar{h}_{11} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2a_s^2) U_s;$$

$$\bar{h}_{22} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2b_s^2) U_s;$$

(5,13,2)

$$\bar{h}_{33} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' + 2 \sum m_s (v_s^2 - 2c_s^2) U_s;$$

$$\bar{h}_{44} = -2 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t-r') d\tau' - 2 \sum m_s v_s^2 U_s.$$

Для дальнейшего удобно преобразовать интеграл, входящий в написанные формулы.

Введем новые переменные u, v, w при помощи соотношений

$$x' - a_s(t-r') = u; \quad y' - b_s(t-r') = v; \quad z' - c_s(t-r') = w.$$

В этих переменных функция $\sigma'_s(t-r')$ имеет вид $\sigma(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \lambda)$. Якобиан преобразования представляет собой определитель, обратный определителю

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial x'} & \frac{\partial v}{\partial x'} & \frac{\partial w}{\partial x'} \\ \frac{\partial u}{\partial y'} & \frac{\partial v}{\partial y'} & \frac{\partial w}{\partial y'} \\ \frac{\partial u}{\partial z'} & \frac{\partial v}{\partial z'} & \frac{\partial w}{\partial z'} \end{vmatrix}.$$

Вычисление дает для якобиана выражение

$$I_s = \left(1 + \frac{da_s}{d\theta} \frac{\partial r'}{\partial x'} + \frac{db_s}{d\theta} \frac{\partial r'}{\partial y'} + \frac{dc_s}{d\theta} \frac{\partial r'}{\partial z'} \right)^{-1}; \quad \theta = t - r',$$

которое при $u = v = w = 0$ приводится к величине

$$I_s = \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1},$$

где r_s определяется соотношением

$$r_s^2 = [x - a_s(\theta)]^2 + [y - b_s(\theta)]^2 + [z - c_s(\theta)]^2; \quad \theta = t - r_s. \quad (5,13,3)$$

В результате указанного преобразования интеграл, содержащийся в (5,13,2), принимает вид

$$\iiint \frac{1}{r'} \sigma(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \lambda) I_s dudvdw$$

и при достаточно большом λ может быть заменен следующим:

$$\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} \iiint \sigma(\sqrt{u^2 + v^2 + w^2}, \lambda) dudvdw.$$

Если снова заменить переменные

$$u = \alpha \sin \psi \cos \varphi; \quad v = \alpha \sin \psi \sin \varphi; \quad w = \alpha \cos \psi$$

и выполнить интегрирование по Ψ и φ , то получится

$$\frac{4\pi}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} \int_0^\infty \sigma(\alpha, \lambda) \alpha^2 d\alpha,$$

или, согласно определению функции σ ,

$$\frac{1}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1}.$$

Таким образом, при $\lambda \rightarrow \infty$ имеем

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2a_s^2); \\ \bar{h}_{22} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2b_s^2); \\ \bar{h}_{33} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2c_s^2); \\ \bar{h}_{44} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta} \right)^{-1} - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \end{aligned} \quad (5,13,4)$$

В первых членах правых частей этих равенств величина r_s определяется соотношением (5,13,3) с учетом запаздывания. Во вто-

рых членах, пренебрегая запаздыванием, можно принять

$$r_s^2 = [x - a_s(t)]^2 + [y - b_s(t)]^2 + [z - c_s(t)]^2. \quad (5.13,5)$$

Остается определить \bar{h}_{ij} с различными индексами.

Положив в (5,13,1) $i = 1, j = 4$, найдем

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum m_s \int \frac{1}{r'} \sigma'_s(t - r') \dot{a}_s(t - r') d\tau'.$$

Если преобразовать переменные как прежде и положить затем $\lambda \rightarrow \infty$, то получится

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s(\theta)}{r_s(\theta)} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1}. \quad (5.13,6)$$

Мы не приводим здесь формулы для \bar{h}_{24} и \bar{h}_{34} ; их легко написать по аналогии.

Допустим, что индексы i, j различны и отличаются от четырех. Принимая $i = 1, j = 2$, найдем

$$\bar{h}_{12} = -4 \sum m_s \dot{a}_s \dot{b}_s U_s,$$

или, после перехода к пределу при $\lambda \rightarrow \infty$,

$$\bar{h}_{12} = -4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}, \quad (5.13,7)$$

где r_s определяется формулой (5,13,5).

Аналогичные выражения можно написать для величин \bar{h}_{23} и \bar{h}_{31} .

Полезно преобразовать найденные значения \bar{h}_{ij} , исключив из них r_s , определяемые с учетом запаздывания соотношениями (5,13,3), и введя величины, отвечающие положениям материальных точек в данный момент времени, согласно (5,13,5).

Выполним разложение

$$\frac{1}{r_s(\theta)} \left(1 + \frac{\partial r_s(\theta)}{\partial \theta}\right)^{-1} = \frac{1}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\}.$$

Выражения для диагональных элементов примут следующий вид:

$$\begin{aligned} \bar{h}_{11} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2\dot{a}_s^2); \\ \bar{h}_{22} &= -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2\dot{b}_s^2); \end{aligned} \quad (5.13,8)$$

$$\bar{h}_{33} = -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \sum \frac{m_s}{r_s} (v_s^2 - 2\dot{c}_s^2);$$

$$\bar{h}_{44} = -2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{v_s}.$$

Величина \bar{h} , как легко убедиться, такова:

$$\bar{h} = 4 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{ 1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t} \right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} \right\} - 4 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \quad (5,13,9)$$

Остальные элементы с точностью до членов второго порядка включительно определяются формулами вида

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s}{r_s}; \quad \bar{h}_{12} = -4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}. \quad (5,13,10)$$

14. Определение величин k_{ij} . Для завершения интегрирования уравнений поля необходимо найти поправки k_{ij} , удовлетворяющие системе уравнений, составленной в п. 12.

Рассмотрим прежде всего уравнения вида (5,12,16), содержащие k_{i4} . Воспользовавшись значениями (5,13,8)—(5,13,10), легко убедиться в том, что в нашем приближении эти уравнения сводятся к соотношениям

$$-\Delta k_{i4} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z} \right) = 0 \text{ и т. д.}$$

Поскольку указанных поправок в других уравнениях нет, можно положить $k_{14} = k_{24} = k_{34} = 0$. Примем далее $k_{12} = k_{23} = k_{31} = 0$ и покажем, что остальные уравнения можно удовлетворить с помощью четырех величин k_{ii} .

Найденное ранее решение (5,13,2) позволяет переписать уравнение (5,12,13) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44}) + 4 \sum m_s \left(-\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 4 \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6(\text{grad } U)^2 - \\ & - 32\pi\rho U = -16\pi S^{11}. \end{aligned} \quad (5,14,1)$$

Вместо (5,12,14) имеем теперь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}) + \\ & + 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) + 6(\text{grad } U)^2 = 32\pi\rho U. \end{aligned} \quad (5,14,2)$$

Уравнение (5,12,15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (k_{44} - k_{33}) - 4 \sum m_s \left(\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - \\ & - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (5,14,3)$$