

Величина  $\bar{h}$ , как легко убедиться, такова:

$$\bar{h} = 4 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{ 1 + \left( \frac{\partial r_s}{\partial t} \right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2} \right\} - 4 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \quad (5,13,9)$$

Остальные элементы с точностью до членов второго порядка включительно определяются формулами вида

$$\bar{h}_{14} = 4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s}{r_s}; \quad \bar{h}_{12} = -4 \sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}. \quad (5,13,10)$$

**14. Определение величин  $k_{ij}$ .** Для завершения интегрирования уравнений поля необходимо найти поправки  $k_{ij}$ , удовлетворяющие системе уравнений, составленной в п. 12.

Рассмотрим прежде всего уравнения вида (5,12,16), содержащие  $k_{i4}$ . Воспользовавшись значениями (5,13,8)—(5,13,10), легко убедиться в том, что в нашем приближении эти уравнения сводятся к соотношениям

$$-\Delta k_{i4} + \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z} \right) = 0 \text{ и т. д.}$$

Поскольку указанных поправок в других уравнениях нет, можно положить  $k_{14} = k_{24} = k_{34} = 0$ . Примем далее  $k_{12} = k_{23} = k_{31} = 0$  и покажем, что остальные уравнения можно удовлетворить с помощью четырех величин  $k_{ii}$ .

Найденное ранее решение (5,13,2) позволяет переписать уравнение (5,12,13) следующим образом:

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44}) + 4 \sum m_s \left( -\ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \right. \\ & \left. + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) - 4 \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6(\text{grad } U)^2 - \\ & - 32\pi\rho U = -16\pi S^{11}. \end{aligned} \quad (5,14,1)$$

Вместо (5,12,14) имеем теперь

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}) + \\ & + 4 \sum m_s \left( \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s \frac{\partial U_s}{\partial z} \right) + 6(\text{grad } U)^2 = 32\pi\rho U. \end{aligned} \quad (5,14,2)$$

Уравнение (5,12,15) принимает вид

$$\begin{aligned} & \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} (k_{44} - k_{33}) - 4 \sum m_s \left( \ddot{a}_s \frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s \frac{\partial U_s}{\partial x} \right) - \\ & - 4 \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} - 8U \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0. \end{aligned} \quad (5,14,3)$$

Легко видеть, что решения трех уравнений последнего типа удовлетворяют уравнениям вида (5,14,1) и (5,14,2).

Действительно, из (5,14,3) следует

$$k_{33} - k_{44} = -4U^2 + 4 \iint \frac{\partial U}{\partial x} \frac{\partial U}{\partial y} dx dy - \\ - 4 \sum m_s \left( \ddot{a}_s \int U_s dx + \ddot{b}_s \int U_s dy \right). \quad (5,14,4)$$

Составив аналогично выражение для  $k_{22} - k_{44}$ , образуем сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{22} - k_{44})$$

и внесем ее в (5,14,1). После необходимых преобразований с учетом уравнений Пуассона для функций  $U_s$ ,  $U$  получим

$$S^{11} = \sum m_s \int \sigma_s \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx,$$

т. е. значение поправки тензора энергии-импульса, найденное ранее в согласии с законом сохранения этого тензора. Подобным же образом убеждаемся в выполнимости двух других уравнений типа (5,14,1).

С помощью соотношений вида (5,14,4) выразим  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{33}$  через  $k_{44}$  и составим сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} (k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2} (k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2} (k_{11} + k_{22}).$$

Внеся ее в (5,14,2) и выполнив необходимые упрощения, получим уравнение

$$\Delta (k_{44} - 2U^2) = 8\pi \sum m_s \left\{ \int \sigma_s \left( \frac{\partial U}{\partial x} - \ddot{a}_s \right) dx + \right. \\ \left. + \int \sigma_s \left( \frac{\partial U}{\partial y} - \ddot{b}_s \right) dy + \int \sigma_s \left( \frac{\partial U}{\partial z} - \ddot{c}_s \right) dz \right\},$$

которое служит для определения  $k_{44}$ .

При достаточно большом  $\lambda$  это уравнение можно написать так:

$$\Delta (k_{44} - 2U^2) = 8\pi \sum m_s \left\{ \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_s - \ddot{a}_s \right] \int \sigma_s dx + \right. \\ \left. + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial y} \right)_s - \ddot{b}_s \right] \int \sigma_s dy + \left[ \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_s - \ddot{c}_s \right] \int \sigma_s dz \right\}. \quad (5,14,5)$$

Решение его по методу Пуассона содержит интегралы вида

$$\iiint \frac{1}{r'} \int \sigma'_s dx' d\tau',$$

взятые по всему пространству. Они расходятся, показывая, что при произвольных  $\ddot{a}_s$ ,  $\ddot{b}_s$ ,  $\ddot{c}_s$  уравнения поля не имеют решения. Для существования решения необходимо, чтобы коэффициенты при инте-

гралах в (5,14,5) тождественно исчезали, т. е. чтобы движение точечных масс происходило по закону Ньютона

$$a_s = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_s; \quad \ddot{b}_s = \left( \frac{\partial U}{\partial x} \right)_s; \quad \ddot{c}_s = \left( \frac{\partial U}{\partial z} \right)_s. \quad (5,14,6)$$

Этот вывод имеет в ОТО фундаментальное значение. Если ньютоново уравнение поля гравитации, т. е. уравнение Пуассона, допускает решение при любом распределении масс, в частности при произвольных движениях тел, создающих поле, то уравнения поля ОТО имеют решение только при определенном движении этих тел. Закон движения в ОТО можно, таким образом, рассматривать как условие интегрируемости уравнений поля.

Закон Ньютона (5,14,6) получен как условие разрешимости уравнений поля во втором приближении. Интегрирование этих уравнений в более высоких приближениях позволяет уточнить закон движения, найдя соответствующие релятивистские поправки к его ньютоновой форме.

Принципиальная возможность объединения закона движения с уравнениями поля впервые рассматривалась в 1927 г. в работе Эйнштейна и Громмера [20] и в последующей статье Эйнштейна [21]. Однако определенное решение вопроса было получено только в 1938 г. в обширном исследовании Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [22], в котором выполнено приближенное интегрирование уравнений поля для системы точечных масс. В результате весьма сложных вычислений было показано, что требование разрешимости уравнений поля в достаточно высоком приближении определяет закон движения точечных масс в виде уравнений Ньютона с релятивистскими поправками.

Почти одновременно В. А. Фоком уравнения поля ОТО были применены к системе тел, имеющих конечные плотности и протяженности [23]. В этой работе интегрирование выполнено с точностью до членов второго порядка, и в качестве необходимого условия разрешимости уравнений поля получен закон (5,14,6). Этот результат впоследствии был подтвержден другими исследователями. Изложенный в последних параграфах метод принадлежит автору [24].

Возвращаемся к определению величин  $k_{ij}$ . Уравнение (5,13,5) при условии (5,13,6) принимает вид  $\Delta(k_{44} - 2U^2) = 0$  и допускает решение  $k_{44} - 2U^2 = \text{const}$ . Поскольку на бесконечности поправка  $k_{44}$  должна исчезать, находим

$$k_{44} = 2 \left( \sum \frac{m_s}{r_s} \right)^2. \quad (5,14,7)$$

Теперь мы имеем возможность завершить интегрирование уравнений поля в принятом приближении. Поправки  $k_{11}$ ,  $k_{22}$ ,  $k_{33}$  определяются при помощи соотношений вида (5,14,4), после чего полные значения компонент метрического тензора находятся по формулам

$g_{ii} = \delta_{ij} + \bar{h}_{ij} + k_{ij}$ . Так, для последней компоненты этого тензора можно написать

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} \left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1} + 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}, \quad (5,14,8)$$

или, если во всех членах перейти к обозначению (5,13,5),

$$g_{44} = 1 - 2 \sum \frac{m_s}{r_s} \left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2} \frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2 \left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2 \sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \quad (5,14,9)$$

Легко составить также выражения для остальных компонент метрического тензора.

**15. Скорость передачи гравитации.** В первом приближении скорость распространения гравитации в ОТО определяется рассмотренным выше решением Эйнштейна (5,13,1), позволяющим найти метрический тензор путем интегрирования тензора энергии-импульса. При вычислении системы поправок  $h_{ij}$  в точке  $x, y, z$  в момент времени  $t$  необходимо, как сказано, в каждой точке  $x', y', z'$ , находящейся на расстоянии  $r'$  от заданной точки, принять значения компонент тензора энергии-импульса для более раннего момента  $t - r'/c$  (в системе CGS для момента  $t - r'/c$ ). Это значит, что тензор энергии-импульса определяет метрику пространства-времени с некоторым запаздыванием, равным времени распространения света. Таким образом, вместо гравитационного дальнего действия, присущего теории Ньютона, в ОТО в данном приближении содержится принцип конечной скорости гравитации, равной скорости света.

Следует подчеркнуть, что этот вывод является результатом приближенного интегрирования уравнений поля. В общем виде вопрос о скорости распространения гравитации требует соответствующего анализа точной формы уравнений поля; он оказывается очень сложным и принадлежит к числу еще нерешенных задач ОТО.

В главе II мы подробно рассмотрели трудности, возникавшие в небесной механике при попытках отказа от гравитационного дальнего действия в теории Ньютона. Упомянул также основной результат анализа Пуанкаре, доказавшего, что, с точки зрения СТО, отказываясь от принципа дальнего действия, необходимо одновременно изменить форму закона тяготения, и притом таким образом, что результирующие эффекты будут иметь порядок  $\frac{v^4}{c^2}$ , тогда как возмущения порядка  $\frac{v}{c}$  исчезнут. Теперь мы можем вернуться к обсуждению этого вопроса с точки зрения ОТО.

12\*