Величина $\bar{h}$, как легко убедиться, такова:

$$\bar{h} = 4\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} - 4\sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \qquad (5,13,9)$$

Остальные элементы с точностью до членов второго порядка включительно определяются формулами вида

$$\bar{h}_{14} = 4\sum \frac{m_s \dot{a}_s}{r_s}; \quad \bar{h}_{12} = -4\sum \frac{m_s \dot{a}_s \dot{b}_s}{r_s}. \qquad (5,13,10)$$

14. Определение величин k_{ij}. Для завершения интегрирования уравнений поля необходимо найти поправки k_{ij}, удовлетворяющие системе уравнений, составленной в п. 12.

Рассмотрим прежде всего три уравнения вида (5,12,16), содержащие k_{i4}. Воспользовавшись значениями (5,13,8)—(5,13,10), легко убедиться в том, что в нашем приближении эти уравнения сводятся к соотношениям

$$-\Delta k_{14} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial k_{14}}{\partial x} + \frac{\partial k_{24}}{\partial y} + \frac{\partial k_{34}}{\partial z}\right) = 0 \text{ и т. д.}$$

Поскольку указанных поправок в других уравнениях нет, можно положить $k_{14} = k_{24} = k_{34} = 0$. Примем далее $k_{12} = k_{23} = k_{31} = 0$ и покажем, что остальные уравнения можно удовлетворить с помощью четырех величин k_{ii}.

Найденное ранее решение (5,13,2) позволяет переписать уравнение (5,12,13) следующим образом:

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33} - k_{44}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{22} - k_{44}) + 4\sum m_s\left(-\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right) - 4\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)^2 - 8U\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + 6(\operatorname{grad} U)^2 - 32\pi\rho U = -16\pi S^{11}. \qquad (5,14,1)$$

Вместо (5,12,14) имеем теперь

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_{22} + k_{33}) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33} + k_{11}) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{11} + k_{22}) + 4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial x} + \ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{c}_s\frac{\partial U_s}{\partial z}\right) + 6(\operatorname{grad} U)^2 = 32\pi\rho U. \qquad (5,14,2)$$

Уравнение (5,12,15) принимает вид

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}(k_{44} - k_{33}) - 4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\frac{\partial U_s}{\partial y} + \ddot{b}_s\frac{\partial U_s}{\partial x}\right) - 4\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} - 8U\frac{\partial^2 U}{\partial x\,\partial y} = 0. \qquad (5,14,3)$$

Легко видеть, что решения трех уравнений последнего типа удовлетворяют уравнениям вида (5,14,1) и (5,14,2).

Действительно, из (5,14,3) следует

$$k_{33}-k_{44}=-4U^2+4\iint\frac{\partial U}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y}\,dx\,dy-$$
$$-4\sum m_s\left(\ddot{a}_s\int U_s dx+\ddot{b}_s\int U_s dy\right). \tag{5,14,4}$$

Составив аналогично выражение для $k_{22}-k_{44}$, образуем сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33}-k_{44})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{22}-k_{44})$$

и внесем ее в (5,14,1). После необходимых преобразований с учетом уравнений Пуассона для функций U_s, U получим

$$S^{11}=\sum m_s\int\sigma_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\ddot{a}_s\right)dx,$$

т. е. значение поправки тензора энергии-импульса, найденное ранее в согласии с законом сохранения этого тензора. Подобным же образом убеждаемся в выполнимости двух других уравнений типа (5,14,1).

С помощью соотношений вида (5,14,4) выразим k_{11}, k_{22}, k_{33} через k_{44} и составим сумму

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(k_{22}+k_{33})+\frac{\partial^2}{\partial y^2}(k_{33}+k_{11})+\frac{\partial^2}{\partial z^2}(k_{11}+k_{22}).$$

Внеся ее в (5,14,2) и выполнив необходимые упрощения, получим уравнение

$$\Delta(k_{44}-2U^2)=8\pi\sum m_s\left\{\int\sigma_s\left(\frac{\partial U}{\partial x}-\ddot{a}_s\right)dx+\right.$$
$$\left.+\int\sigma_s\left(\frac{\partial U}{\partial y}-\ddot{b}_s\right)dy+\int\sigma_s\left(\frac{\partial U}{\partial z}-\ddot{c}_s\right)dz\right\},$$

которое служит для определения k_{44}.

При достаточно большом λ это уравнение можно написать так:

$$\Delta(k_{44}-2U^2)=8\pi\sum m_s\left\{\left[\left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_s-\ddot{a}_s\right]\int\sigma_s dx+\right.$$
$$\left.+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial y}\right)-\ddot{b}_s\right]\int\sigma_s dy+\left[\left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_s-\ddot{c}_s\right]\int\sigma_s dz\right\}. \tag{5,14,5}$$

Решение его по методу Пуассона содержит интегралы вида

$$\iiint\frac{1}{r'}\int\sigma_s' dx'd\tau',$$

взятые по всему пространству. Они расходятся, показывая, что при произвольных $\ddot{a}_s$, $\ddot{b}_s$, $\ddot{c}_s$ уравнения поля не имеют решения. Для существования решения необходимо, чтобы коэффициенты при интегралах в (5,14,5) тождественно исчезали, т. е. чтобы движение точечных масс происходило по закону Ньютона

$$\ddot{a}_s = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_s; \quad \ddot{b}_s = \left(\frac{\partial U}{\partial x}\right)_s; \quad \ddot{c}_s = \left(\frac{\partial U}{\partial z}\right)_s. \tag{5,14,6}$$

Этот вывод имеет в ОТО фундаментальное значение. Если ньютоново уравнение поля гравитации, т. е. уравнение Пуассона, допускает решение при любом распределении масс, в частности при произвольных движениях тел, создающих поле, то уравнения поля ОТО имеют решение только при определенном движении этих тел. Закон движения в ОТО можно, таким образом, рассматривать как условие интегрируемости уравнений поля.

Закон Ньютона (5,14,6) получен как условие разрешимости уравнений поля во втором приближении. Интегрирование этих уравнений в более высоких приближениях позволяет уточнить закон движения, найдя соответствующие релятивистские поправки к его ньютоновой форме.

Принципиальная возможность объединения закона движения с уравнениями поля впервые рассматривалась в 1927 г. в работе Эйнштейна и Громмера [20] и в последующей статье Эйнштейна [21]. Однако определенное решение вопроса было получено только в 1938 г. в обширном исследовании Эйнштейна, Инфельда и Гофмана [22], в котором выполнено приближенное интегрирование уравнений поля для системы точечных масс. В результате весьма сложных вычислений было показано, что требование разрешимости уравнений поля в достаточно высоком приближении определяет закон движения точечных масс в виде уравнений Ньютона с релятивистскими поправками.

Почти одновременно В. А. Фоком уравнения поля ОТО были применены к системе тел, имеющих конечные плотности и протяженности [23]. В этой работе интегрирование выполнено с точностью до членов второго порядка, и в качестве необходимого условия разрешимости уравнений поля получен закон (5,14,6). Этот результат впоследствии был подтвержден другими исследователями. Изложенный в последних параграфах метод принадлежит автору [24].

Возвращаемся к определению величин k_{ij}. Уравнение (5,13,5) при условии (5,13,6) принимает вид $\Delta(k_{44} - 2U^2) = 0$ и допускает решение $k_{44} - 2U^2 = \text{const}$. Поскольку на бесконечности поправка k_{44} должна исчезать, находим

$$k_{44} = 2\left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2. \tag{5,14,7}$$

Теперь мы имеем возможность завершить интегрирование уравнений поля в принятом приближении. Поправки k_{11}, k_{22}, k_{33} определяются при помощи соотношений вида (5,14,4), после чего полные значения компонент метрического тензора находятся по формулам

$g_{ij} = \delta_{ij} + \bar{h}_{ij} + k_{ij}$. Так, для последней компоненты этого тензора можно написать

$$g_{44} = 1 - 2\sum \frac{m_s}{r_s(\theta)}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1} + 2\left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - \\ - 2\sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}, \qquad (5,14,8)$$

или, если во всех членах перейти к обозначению (5,13,5),

$$g_{44} = 1 - 2\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + \\ + 2\left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2\sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \qquad (5,14,9)$$

Легко составить также выражения для остальных компонент метрического тензора.

15. Скорость передачи гравитации. В первом приближении скорость распространения гравитации в ОТО определяется рассмотренным выше решением Эйнштейна (5,13,1), позволяющим найти метрический тензор путем интегрирования тензора энергии-импульса. При вычислении системы поправок h_{ij} в точке x, y, z в момент времени t необходимо, как сказано, в каждой точке x', y', z', находящейся на расстоянии r' от заданной точки, принять значения компонент тензора энергии-импульса для более раннего момента $t - r'$ $\left(\text{в системе } CGS \text{ для момента } t - \frac{r'}{c}\right)$. Это значит, что тензор энергии-импульса определяет метрику пространства-времени с некоторым запаздыванием, равным времени распространения света. Таким образом, вместо гравитационного дальнодействия, присущего теории Ньютона, в ОТО в данном приближении содержится принцип конечной скорости гравитации, равной скорости света.

Следует подчеркнуть, что этот вывод является результатом приближенного интегрирования уравнений поля. В общем виде вопрос о скорости распространения гравитации требует соответствующего анализа точной формы уравнений поля; он оказывается очень сложным и принадлежит к числу еще нерешенных задач ОТО.

В главе II мы подробно рассмотрели трудности, возникавшие в небесной механике при попытках отказа от гравитационного дальнодействия в теории Ньютона. Упоминался также основной результат анализа Пуанкаре, доказавшего, что, с точки зрения СТО, отказываясь от принципа дальнодействия, необходимо одновременно изменить форму закона тяготения, и притом таким образом, что результирующие эффекты будут иметь порядок $\frac{v^2}{c^2}$, тогда как возмущения порядка $\frac{v}{c}$ исчезнут. Теперь мы можем вернуться к обсуждению этого вопроса с точки зрения ОТО.