$g_{ij} = \delta_{ij} + \bar{h}_{ij} + k_{ij}$. Так, для последней компоненты этого тензора можно написать

$$g_{44} = 1 - 2\sum \frac{m_s}{r_s(\theta)}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1} + 2\left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2\sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}, \qquad (5,14,8)$$

или, если во всех членах перейти к обозначению (5,13,5),

$$g_{44} = 1 - 2\sum \frac{m_s}{r_s}\left\{1 + \left(\frac{\partial r_s}{\partial t}\right)^2 + \frac{r_s}{2}\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right\} + 2\left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2\sum \frac{m_s v_s^2}{r_s}. \qquad (5,14,9)$$

Легко составить также выражения для остальных компонент метрического тензора.

15. Скорость передачи гравитации. В первом приближении скорость распространения гравитации в ОТО определяется рассмотренным выше решением Эйнштейна (5,13,1), позволяющим найти метрический тензор путем интегрирования тензора энергии-импульса. При вычислении системы поправок h_{ij} в точке x, y, z в момент времени t необходимо, как сказано, в каждой точке x', y', z', находящейся на расстоянии r' от заданной точки, принять значения компонент тензора энергии-импульса для более раннего момента $t - r'$ $\left(\text{в системе } CGS \text{ для момента } t - \frac{r'}{c}\right)$. Это значит, что тензор энергии-импульса определяет метрику пространства-времени с некоторым запаздыванием, равным времени распространения света. Таким образом, вместо гравитационного дальнодействия, присущего теории Ньютона, в ОТО в данном приближении содержится принцип конечной скорости гравитации, равной скорости света.

Следует подчеркнуть, что этот вывод является результатом приближенного интегрирования уравнений поля. В общем виде вопрос о скорости распространения гравитации требует соответствующего анализа точной формы уравнений поля; он оказывается очень сложным и принадлежит к числу еще нерешенных задач ОТО.

В главе II мы подробно рассмотрели трудности, возникавшие в небесной механике при попытках отказа от гравитационного дальнодействия в теории Ньютона. Упоминался также основной результат анализа Пуанкаре, доказавшего, что, с точки зрения СТО, отказываясь от принципа дальнодействия, необходимо одновременно изменить форму закона тяготения, и притом таким образом, что результирующие эффекты будут иметь порядок $\frac{v^2}{c^2}$, тогда как возмущения порядка $\frac{v}{c}$ исчезнут. Теперь мы можем вернуться к обсуждению этого вопроса с точки зрения ОТО.

Рассмотрим движение частицы в поле тяготения системы тел с массами m_s, движущихся по законам $a_s(t)$, $b_s(t)$, $c_s(t)$. Движение частицы происходит по принципу геодезической линии, уравнения которой имеют вид (4,7,6). Положив, что x^σ при $\sigma = 1, 2, 3$ являются пространственными координатами x, y, z соответственно, а x^4 — временем t, можно написать эти уравнения в форме

$$\frac{d^2x^\sigma}{\partial t^2} + \left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{\partial t}\right)\frac{dx^\alpha}{\partial t}\frac{dx^\beta}{dt} = 0$$

Возмущения Лапласа имеют, как мы видели, порядок $\frac{3}{2}$ и определяются членами, содержащими произведения потенциала на составляющие скоростей. Поскольку символы Кристофеля имеют порядок не ниже первого, в нашем приближении уравнения геодезической линии следует писать в виде

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} + \Gamma^\sigma_{44} = 0.$$

Развернутое выражение символа Кристофеля

$$\Gamma^\sigma_{44} = \frac{1}{2}\delta^{\sigma\sigma}\left(\frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial t} + \frac{\partial g_{4\sigma}}{\partial t} - \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}\right)$$

и решение (5,13,9) показывают, что с точностью до членов порядка $\frac{3}{2}$ включительно эти уравнения сводятся к следующим:

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = \frac{\partial}{\partial x^\sigma}\left(-\frac{1}{2}g_{44}\right). \tag{5,15,1}$$

Входящая сюда последняя компонента метрического тензора определяется формулой (5,14,8).

С помощью разложения

$$\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^{-1} = 1 - \frac{\partial r_s}{\partial \theta} + \left(\frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^2$$

представим второй член формулы (5,14,8) в виде

$$-2\sum\frac{m_s}{r_s(\theta)} + 2\sum\frac{m_s}{r_s(\theta)}\frac{\partial r_s}{\partial \theta} - 2\sum\frac{m_s}{r_s(\theta)}\left(\frac{\partial r_s}{\partial \theta}\right)^2.$$

В двух последних суммах этого выражения, согласно (5,13,3) и (5,13,5), можно принять

$$\frac{1}{r_s(\theta)} = \frac{1}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial t}\right); \quad \frac{\partial r_s}{\partial \theta} = \frac{\partial r_s}{\partial t} - r_s\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}.$$

Выполнив эти подстановки и необходимые вычисления, получим

$$g_{44} = 1 - 2\sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}\left(\frac{\partial r_s}{\partial t} - r_s\frac{\partial^2 r_s}{\partial t^2}\right) + $$

$$+ 2\left(\sum \frac{m_s}{r_s}\right)^2 - 2\sum \frac{m_s v_s^2}{v_s}. \qquad (5,15,2)$$

Второй член соотношения (5, 15, 2) содержит ньютонов потенциал с учетом запаздывания; третий и последний выражают зависимость метрического тензора от движения масс, создающих поле тяготения. С точностью до величин порядка $\frac{3}{2}$ включительно имеем

$$g_{44} = 1 - 2\sum \frac{m_s}{r_s(\theta)} + 2\sum \frac{m_s}{r_s}\frac{\partial r_s}{\partial t}. \qquad (5,15,3)$$

И в данном приближении, кроме запаздывания, как видим, необходимо учитывать зависимость поля от движения масс. Внеся в (5,15,3) соотношение

$$\frac{1}{r_s(\theta)} = \frac{1}{r_s}\left(1 + \frac{\partial r_s}{\partial t}\right),$$

находим $g_{44} = 1 - 2\varphi$, где φ — обычный ньютонов потенциал, вычисленный без учета запаздывания. Принцип геодезической линии (5,15,1) переходит при этом в закон движения Ньютона

$$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^\sigma}, \quad \sigma = 1,\ 2,\ 3.$$

Таким образом, и с точки зрения ОТО эффект запаздывающего потенциала в рассматриваемом приближении компенсируется зависимостью поля гравитации от движения создающих его масс. Как указывал Пуанкаре, новые эффекты, выражающие отступление от закона движения Ньютона, могут иметь порядок не ниже второго.

16. Внешнее решение для однородного вращающегося шара. В механике Ньютона поле тяготения однородного шара не зависит от его вращения вокруг диаметра и удовлетворяет условию сферической симметрии. В ОТО вращение шара нарушает центральную симметрию поля. Внешнее поле гравитации сферического небесного тела обладает симметрией относительно оси вращения и зависит не только от массы, но также от угловой скорости и радиуса тела.

Найдем внешнее решение уравнений поля для однородного шара радиуса R, вращающегося с постоянной угловой скоростью ω [25]. Ось Oz системы координат направим вдоль оси вращения тела, плоскость xy совместим с плоскостью его экватора. Принимая обычное разложение $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, воспользуемся решением Эйнштейна. Имея в виду последующее приложение, величину h_{44} будем