17. Поле тяжести в ОТО. В механике Ньютона полем тяжести называют однородное гравитационное поле, обладающее во всех точках одинаковым градиентом потенциала. Свободная материальная точка при соответствующем выборе координат движется в таком поле по закону

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2y}{\partial t^2} = 0; \quad \frac{d^2z}{dt^2} = -g, \qquad (5,17,1)$$

где g — постоянное ускорение, являющееся основной характеристикой поля.

В механике Ньютона постоянное поле тяжести можно осуществить двумя различными способами. Один из них состоит во введении системы координат, движущейся с постоянным ускорением относительно инерциальной системы отсчета. Свободная частица, отнесенная к таким координатам, движется по закону (5,17,1).

Во втором способе поле тяжести является полем гравитации бесконечной материальной плоскости с постоянной поверхностной плотностью.

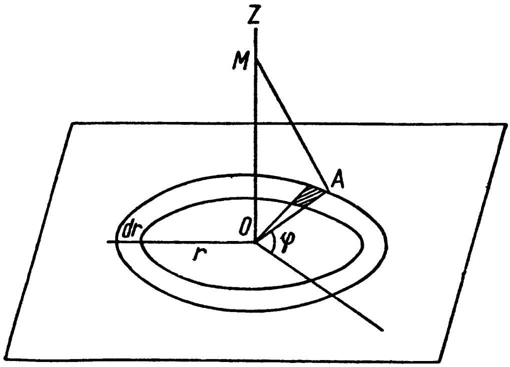

Рис. 16.

Рассмотрим бесконечно тонкое материальное кольцо радиуса r и ширины dr. Элемент кольца обладает массой $\sigma r dr d\varphi$ и создает в точке M напряженность, направленную вдоль линии MA:

$$\frac{\gamma\sigma r dr d\varphi}{r^2 + z^2},$$

где σ — поверхностная плотность. Умножая это выражение на отношение $\frac{z}{(z^2 + r^2)^{\frac{1}{2}}}$, найдем величину составляющей напряженности в направлении MO. Поэтому напряженность, обусловленная кольцом, равна $\frac{2\pi\gamma\sigma r z dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}}$.

Выполнив интегрирование, получим

$$g = 2\pi\gamma\sigma z \int_0^\infty \frac{r dr}{(r^2 + z^2)^{3/2}} = 2\pi\gamma\sigma.$$

Это показывает, что материальная плоскость с поверхностной плотностью $\sigma = \frac{g}{2\pi\gamma}$ создает однородное поле с заданным ускорением g.

Естественно спросить, можно ли сохранить понятие однородного поля тяжести в ОТО.

Будем искать решение уравнений поля Эйнштейна в форме

$$ds^2 = -Adx^2 - Bdy^2 - Cdz^2 + Ddt^2, \qquad (5,17,2)$$

где A, B, C, D — положительные функции координаты z.

Составим выражения для компонент тензора Риччи.

В случае квадратической формы (5,17,2) отличными от нуля являются следующие символы Кристофеля:

$$\Gamma^3_{11} = -\frac{A'}{2C}; \quad \Gamma^3_{22} = -\frac{B'}{2C}; \quad \Gamma^3_{33} = \frac{C'}{2C}; \quad \Gamma^3_{44} = \frac{D'}{2C};$$

$$\Gamma^1_{13} = \frac{A'}{2A}; \quad \Gamma^2_{23} = \frac{B'}{2B}; \quad \Gamma^4_{43} = \frac{D'}{2D}.$$

Входящая в выражение тензора Риччи сумма $\Gamma^\alpha_{i\alpha}$ при $i = 3$ определяется, как легко убедиться, формулой

$$\Gamma^\alpha_{3\alpha} = \frac{A'}{2A} + \frac{B'}{2B} + \frac{C'}{2C} + \frac{D'}{2D}.$$

При других значениях индекса i эта сумма тождественно равна нулю.

С помощью написанных соотношений находим диагональные компоненты тензора Риччи

$$R_{11} = \frac{A''}{2C} + \frac{A'}{4C}\left(-\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} + \frac{D'}{D}\right);$$

$$R_{22} = \frac{B''}{2C} + \frac{B'}{4C}\left(\frac{A'}{A} - \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} + \frac{D'}{D}\right);$$

$$R_{33} = \frac{1}{2}\left(\frac{A''}{A} + \frac{B''}{B} + \frac{D''}{D}\right) - \frac{1}{4}\left(\frac{A'^2}{A^2} + \frac{B'^2}{B^2} + \frac{D'^2}{D^2}\right) - \\ - \frac{1}{4}\left(\frac{A'C'}{AC} + \frac{B'C'}{BC} + \frac{C'D'}{CD}\right);$$

$$R_{44} = -\frac{D''}{2C} - \frac{D'}{4C}\left(\frac{A'}{A} + \frac{B'}{B} - \frac{C'}{C} - \frac{D'}{D}\right).$$

Остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Система уравнений поля сводится в рассматриваемом случае к четырем уравнениям вида $R_{ii} = 0$. Уравнение $R_{33} = 0$ значительно упрощается, если внести в него производные A'', B'', D'' из трех других уравнений. Кроме того, ввиду равноправности осей x, y, ориентированных перпендикулярно полю, можно положить $A = B$.

Выполнив необходимые преобразования, получим систему трех дифференциальных уравнений

$$2\left(\frac{A'}{A}-\frac{A'C'}{AC}+\frac{A'}{A}\left(\frac{2A'}{A}+\frac{D'}{D}\right)=0;\right.$$

$$2\left(\frac{D'}{D}\right)'-\frac{C'D'}{CD}+\frac{D'}{D}\left(\frac{2A'}{A}+\frac{D'}{D}\right)=0;$$

$$\frac{A'}{A}\left(\frac{A'}{A}+\frac{2D'}{D}\right)=0. \qquad (5,17,3)$$

Согласно последнему уравнению, здесь возможны случаи $A'=$ $=0$ и $\frac{A'}{A}+\frac{2D'}{D}=0$.

В первом из них можно принять $A = 1$, так как функции A, C, D находятся с точностью до постоянных множителей, поскольку последние с помощью соответствующих преобразований масштабов приводятся к единицам. Второе уравнение системы принимает следующий вид:

$$\left(\frac{D'}{D}\right)'-\frac{1}{2}\frac{C'D'}{CD}+\frac{1}{2}\frac{D'^2}{D^2}=0$$

и дает $C = aD^{-1}D'^2$, где a — постоянная интегрирования, которую мы оставим пока неопределенной.

Во втором случае можно положить $A = D^{-2}$. Два первые уравнения системы приводятся при этом к одному

$$\left(\frac{D'}{D}\right)'-\frac{1}{2}\frac{C'D'}{CD}-\frac{3}{2}\frac{D'^2}{D^2}=0$$

и дают $C = bD^{-5}D'^2$, где b — новая постоянная, значение которой будет выбрано позднее.

Итак, система уравнений поля (5,17,3) имеет два решения:

$$A=1,\ C=aD^{-1}D'^2; \qquad (5,17,4)$$

$$A=D^{-2};\ C=bD^{-5}D'^2. \qquad (5,17,5)$$

Функция D может быть задана независимо, поскольку два первых уравнения системы (5,17,3) сводятся к одному. Выбор следует выполнить так, чтобы в первом приближении обеспечить переход к закону движения (5,17,1).

Свободное движение частицы определяется принципом четырехмерной геодезической линии. Рассматривая пространственные координаты x^σ в функции времени $x^4 = t$, уравнения этой линии, согласно (4,7,6), можно написать в виде

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{dt}\right)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0.$$

Используя приведенные значения символов Кристофеля, при $\sigma = 1$ получим уравнение

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{A'}{A} - \frac{D'}{D}\right)\frac{dx}{dt}\frac{dz}{dt} = 0,$$

интеграл которого $\frac{dx}{dt} = CA^{-1}D$ показывает, что при свободном падении, когда в начальный момент скорость частицы равнялась нулю, должно быть вообще $x = \text{const}$. Такой же особенностью обладает движение в направлении оси y.

Положим $\sigma = 3$ и допустим, что указанное начальное условие выполнено. Движение вдоль поля определяется в этом случае уравнением

$$\frac{d^2z}{dt^2} + \left(\frac{C'}{2C} - \frac{D'}{D}\right)\left(\frac{dz}{dt}\right)^2 + \frac{D'}{2C} = 0.$$

В ньютоновом приближении член, зависящий от скорости, должен быть опущен. Поэтому для перехода к закону падения Галилея (5,17,1) необходимо принять условие $D' = 2gC$, которым и определяется функция D.

Принимая для постоянных интегрирования a, b значение $\frac{1}{4}g^2$, найдем $D = e^{2gz}$ и $D = (1 - 8gz)^{-\frac{1}{4}}$, соответственно (5,17,4) и (5,17,5).

При таком выборе функции D решения уравнений поля имеют вид

$$A = 1;\quad C = e^{2gz};\quad D = e^{2gz}; \tag{5,17,6}$$

$$A = (1 - 8gz)^{\frac{1}{2}};\quad C = (1 - 8gz)^{-\frac{5}{4}};\quad D = (1 - 8gz)^{-\frac{1}{4}}. \tag{5,17,7}$$

Эти решения являются, по-видимому, простейшими релятивистскими обобщениями понятия однородного поля тяжести механики Ньютона.

Напомним, что в этих формулах используются релятивистские единицы измерений. Если от этих единиц перейти к системе CGS, то вместо g следует писать $\frac{g}{c^2}$, где c — постоянная скорости света. Функцию D необходимо при этом снабдить множителем c^2.

Полезно также подчеркнуть, что оба решения уравнений поля обеспечивают переход к закону падения (5,17,1) только в первом приближении, тогда как точная форма релятивистских уравнений движения отличается от этого закона.

Как указывалось в главе IV, необходимым и достаточным условием вырождения римановой геометрии в эвклидову является исчезновение тензора кривизны Римана — Кристофеля. В общем случае для четырехмерного континуума число существенных компонент тензора кривизны, которые должны быть заданы независимо, равно 20; остальные компоненты можно получить при помощи известных алгебраических свойств этого тензора.

Прямое вычисление показывает, что в нашем случае отличаться от нуля могут только следующие существенные компоненты:

$$\begin{aligned} R^2_{12.1.} &= -\frac{A'^2}{4AC}; \quad R^3_{13.1.} = R^3_{23.2.} = -\frac{A''}{2C} + \frac{A'^2}{4AC} + \frac{A'C'}{4C^2}; \\ R^4_{14.1.} &= R^4_{24.2.} = -\frac{A'D'}{4CD}; \quad R^4_{34.3.} = -\frac{D''}{2C} + \frac{D'^2}{4D^2} + \frac{C'D'}{4CD}. \end{aligned} \tag{5,17,8}$$

Остальные компоненты тождественно равны нулю.

Соотношение (5,17,4) дает $R^l_{ij.k} = 0$, показывая, что это решение отвечает псевдоэвклидовой метрике пространства-времени и может быть получено из квадратической формы Минковского при помощи соответствующего преобразования координат.

Для (5,17,5) компоненты тензора кривизны (5,17,8) отличны от нуля. Это решение определяет некоторую псевдориманову метрику, которую нельзя получить из континуума Минковского преобразованием координат.

Мы видим, что, как и в механике Ньютона, в ОТО имеется возможность осуществить однородное поле тяжести двумя способами, один из которых состоит в специальном выборе координат, а другой требует введения «истинного» поля гравитации.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein. Die Grundlage der allgemeinen Relathivitätstheorie.— Annal. Phys., 49, 769, 1916. Русск. пер.: Принцип относительности. ОНТИ, М., 1935; Собр. научн. трудов., 1, 452. «Наука», М., 1965.

2. H. Weyl. Raum — Zeit — Materie. Springer, Berlin, 1923.

3. W. Pauli. Relativitätstheorie. Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften, B. V_2, H. IV, Art. 19. Leipzig, 1921. Русск. пер.: В. Паули. Теория относительности. ОГИЗ, М.— Л., 1947.

4. M. Laue. Relativitätstheorie. Braunschweig, 1923.

5. A. S. Eddington. The Mathematical Theorie of Relativity. Oxford, 1924. Русск. пер.: А. С. Эддингтон. Математическая теория относительности. Гос. научно-техн. изд-во, Харьков — Киев, 1933.

6. R. C. Tolman. Relativity, Thermodynamics and Cosmology. Oxford, 1934.

7. P. G. Bergmann. Introduction to the Theory of Relativity. New York, 1942. Русск. пер.: П. Г. Бергман. Введение в теорию относительности. ИЛ, М., 1947.