

Разность полярных углов двух точек орбиты, симметричных относительно оси, равна

$$\varphi' - \varphi = P - \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}. \quad (6,2,19)$$

Если эта разность окажется кратной 2π , то обе точки совпадают, образуя точку возврата. Предположим, что при заданных корнях полинома $f(u)$ период удовлетворяет условию

$$2n\pi < P < 2(n+1)\pi,$$

где n — целое положительное число. В таком случае на рассматриваемом отрезке орбиты имеется n точек возврата. Значения переменной Φ , отвечающие этим точкам, находятся из соотношения

$$\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{1}{4} (P - 2\pi i) \sqrt{2m(u_3 - u_1)}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6,2,20)$$

которое следует из (6,2,19) при $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Все точки возврата расположены на оси симметрии.

В частном случае, когда период удовлетворяет условию $P = 2n\pi$, орбита имеет $n - 1$ двойных точек и представляет собой замкнутую кривую. Если $P < 4\pi$, то на протяжении периода орбита имеет только одну точку возврата. Однако в последующих периодах орбита вновь пересекает данный отрезок, образуя на нем новые точки возврата, среди которых могут оказаться точки более высоких кратностей.

На рис. 21 построен график орбиты класса D с двумя точками возврата. При вычислении принято: $h^2 = \frac{17}{18}$, $a = 14,1518 \text{ m}$.

3. Приближенное уравнение орбиты. Составим приближенное уравнение орбит классов C и D в предположении, что все их точки достаточно удалены от центра поля гравитации.

Точное уравнение орбиты в форме (6,2,14) или (6,2,18) является общим для обоих классов. Полином $f(u)$ имеет три вещественных корня, удовлетворяющих соотношению $u_1 + u_2 + u_3 = \frac{1}{2m}$.

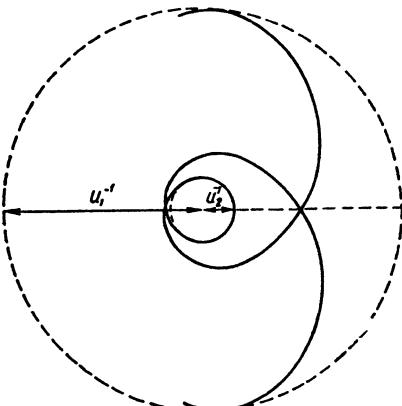


Рис. 21.

Введя обозначения

$$p_0 = \frac{2}{u_1 + u_2}; \quad e_0 = \frac{u_2 - u_1}{u_2 + u_1},$$

можно написать

$$u_1 = \frac{1 - e_0}{p_0}; \quad u_2 = \frac{1 + e_0}{p_0}; \quad u_3 = \frac{1}{2m} - \frac{2}{p_0}. \quad (6.3.1)$$

Величина p_0 характеризует линейные размеры орбиты. Считая этот параметр достаточно большим, сохраним в уравнении орбиты только первую степень отношения $\frac{m}{p_0}$, опуская более высокие степени. В данном приближении модуль эллиптических интегралов, входящих в точное уравнение орбиты, определяется, согласно (6, 2, 12), формулой $k^2 = \frac{4me_0}{p_0}$, а коэффициент правой части этого уравнения равен

$$\frac{1}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} = 1 + \frac{(3 - e_0)m}{p_0}.$$

С той же степенью точности находим

$$\int_0^\Phi \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \left(1 + \frac{me_0}{p_0}\right)\Phi - \frac{me_0}{2p_0} \sin 2\Phi.$$

Точное уравнение орбиты приводится к виду

$$\pm(\varphi - \varphi_m) \left(1 - \frac{3m}{p_0}\right) = \pi - 2\Phi + \frac{me_0}{p_0} \sin 2\Phi,$$

или

$$\cos \left[\varphi - \varphi_m - \frac{3m}{p_0} (\varphi - \varphi_m) \right] = -\cos 2\Phi - \frac{me_0}{p_0} \sin^2 2\Phi.$$

В правой части равенства вместо $\sin^2 2\Phi$ в принятом приближении можно написать $\sin^2(\varphi - \varphi_m)$. Поэтому, воспользовавшись соотношением $\cos 2\Phi = \frac{1 - p_0 u}{e_0}$, которое находится из преобразования $u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi$ с учетом (6.3.1), представим предыдущее уравнение в форме

$$u = \frac{1}{p_0} + \frac{me_0^2}{p_0^2} \sin^2(\varphi - \varphi_m) + \frac{e_0}{p_0} \cos \left[\varphi - \varphi_m - \frac{3m}{p_0} (\varphi - \varphi_m) \right],$$

или

$$u = \frac{1}{p} + \frac{e}{p} \cos(\varphi - \varphi_0 - \Delta\omega), \quad (6.3.2)$$

где

$$\frac{p}{p_0} = \frac{e}{e_0} = 1 - \frac{me_0^2}{p_0} \sin^2(\varphi - \varphi_m); \quad \Delta\omega = \frac{3m}{p_0} (\varphi - \varphi_m). \quad (6.3.3)$$

В нашем приближении релятивистские орбиты двух рассматриваемых классов весьма мало отличаются от конических сечений механики Ньютона. Орбиты класса С, для которых $u_1 \ll 0$ и, следовательно, $e_0 \geq 1$, соответствуют гиперболам и параболам, а орбиты класса D, имеющие $u_1 > 0$ (и, следовательно, $e_0 < 1$), — эллипсам. С достаточной точностью релятивистскую орбиту можно считать коническим сечением, элементы которого мало изменяются.

Вековым эффектом обладает только орбита класса D, которую можно рассматривать как эллипс, медленно процессирующий в прямом направлении. В течение одного обращения линия апсид орбиты поворачивается на угол $\Delta\omega = \frac{6\pi m}{\rho_0}$, как это следует из (6,3,3), при $\varphi - \varphi_m = 2\pi$. В единицах системы CGS угол поворота

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma M}{c^2 a (1 - e^2)}, \quad (6,3,4)$$

где a , e — большая полуось и эксцентриситет орбиты, M — масса центрального тела.

Для планет Солнечной системы формула (6,3,4) дает следующие эффекты за столетие:

Меркурий	43",0
Венера	8",6
Земля	3",8
Марс	1",4

Наибольший эффект наблюдается у Меркурия — ближайшей к Солнцу планеты, имеющей орбиту со сравнительно большим эксцентриситетом. Для Венеры релятивистское перемещение перигелия остается еще значительным, но малая эксцентрисичность ее орбиты ухудшает точность определения перигелия, вследствие чего сравнение теоретических результатов с наблюденными становится менее уверенным. В еще большей степени это относится к Земле.

В главе II приведены современные оценки невязки между наблюдаемым движением линии апсид планетной орбиты и результатами вычислений, выполненных на основе ньютоновой теории возмущений. Сравнивая их (см. 2,1,6) со значениями, вычисленными по формуле (6,3,4), можно с уверенностью сказать, что основной вывод релятивистской задачи Кеплера хорошо согласуется с данными астрономических наблюдений.

Для проверки формулы (6,3,4) может представить интерес астероид Икар, имеющий весьма малое среднее расстояние от Солнца (1,077 а. е.) и отличающийся большой эксцентрисичностью орбиты ($e = 0,8265$). Согласно (6,3,4), вековое перемещение перигелия этой малой планеты должно составить около $10''$. Однако вследствие недостаточности наблюдений проверить этот эффект пока невозможно.