

ной звезды, необходимо изучить общую задачу двух тел, которая оказывается в ОТО весьма сложной и до сих пор не имеет полного решения.

В предыдущей главе мы видели, что система точечных масс с произвольным законом движения не удовлетворяет уравнениям поля ОТО. Уравнения поля допускают интегрирование с точностью до членов второго порядка включительно лишь в том случае, если движение масс отвечает закону Ньютона. Таким образом, закон движения Ньютона можно рассматривать как условие интегрируемости уравнений поля Эйнштейна во втором приближении. В свою очередь, закон движения во втором приближении (т. е. с релятивистскими поправками к закону Ньютона) является условием интегрируемости уравнений поля ОТО с точностью до членов третьего порядка. Как указывалось, такой метод вывода закона движения взаимодействующих точечных масс впервые был развит в известной работе Эйнштейна, Гофмана и Инфельда.

Ограниченная задача двух тел, названная нами задачей Кеплера, имеет в ОТО исчерпывающее решение, позволяющее изучить все типы возможных орбит. Что же касается общей задачи двух тел, то в указанной ее постановке имеется возможность выполнить только приближенный анализ различных особенностей движения в предположении, что расстояние между телами остается достаточно большим и поэтому релятивистские эффекты в их движении малы. Главным из этих эффектов, который может представить практический интерес, является движение линии апсид периодической орбиты. Отсылая читателей к монографии В. А. Фока [5], в которой подробно изучается задача о движении двух массивных тел, мы приведем здесь только конечную формулу, определяющую величину этого эффекта. В течение одного обращения линия апсид орбиты поворачивается в прямом направлении на угол

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\gamma(M_1 + M_2)}{c^2 a(1 - e^2)}, \quad (6,5,1)$$

где M_1, M_2 — массы тел системы, a и e — большая полуось и эксцентриситет относительной орбиты.

В принципиальном отношении это обобщение формулы Эйнштейна представляет значительный интерес. Практически же формула (6,5,1) не может быть проверена наблюдениями, поскольку в движении двойных звезд обнаружить столь тонкий эффект в настоящее время невозможно.

6. Распространение света в центральном поле гравитации. Распространение света в гравитационном поле определяется принципом геодезической линии и условием $ds = 0$, которое переносится в ОТО из СТО на основе принципа эквивалентности. Особого внимания заслуживает задача о распространении светового луча в статическом

поле одного центра, поскольку именно к этому случаю относится известный оптический эффект ОТО (отклонение лучей в поле тяготения Солнца), который допускает проверку путем наблюдений.

Приближенное рассмотрение задачи, приводящее к известной формуле Эйнштейна для угла отклонения светового луча в центральном поле гравитации, можно найти почти в каждом руководстве по ОТО. Ниже приводится подробное исследование формы луча в указанном поле, выполненное автором с помощью эллиптических интегралов [6]. Основные типы лучей иллюстрируются графиками.

Воспользуемся внешним решением Шварцшильда (5,8,6). В главе VI, п. 1 мы получили первые интегралы уравнений геодезической линии в виде соотношений (6,1,4) — (6,1,6). При $ds = 0$ равенство (6,1,5) превращается в тождество, если положить $\dot{h} = \infty$. Таким образом, в рассматриваемом случае имеем

$$\frac{d\varphi}{dt} = \frac{C_1}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right); \quad (6,6,1)$$

$$\left(\frac{dr}{dt} \right)^2 = \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^2 \left\{ 1 - \frac{C_1^2}{r^2} \left(1 - \frac{2m}{r} \right) \right\}. \quad (6,6,2)$$

Эти уравнения и определяют распространение света в поле одного центра, помещенного в начале координат.

Разделим равенство (6,6,2) на возведенное в квадрат соотношение (6,6,1). Введя переменную $u = \frac{1}{r}$, получим дифференциальное уравнение

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = 2mu^3 - u^2 + C_1^{-2}.$$

На достаточно большом расстоянии от центра поля член $2mu^3$ можно опустить. Решение дифференциального уравнения имеет в этой области вид $u = C_1^{-1} \sin(\omega - \varphi)$, показывая, что вдали от центра световой луч превращается в прямую линию. Обозначив через $a = C_1$ перпендикуляр, опущенный на эту прямую из центра поля, напишем дифференциальное уравнение луча

$$\left(\frac{du}{d\varphi} \right)^2 = f(u) = 2mu^3 - u^2 + a^{-2}. \quad (6,6,3)$$

Нетрудно убедиться в том, что трехчлен $f(u)$ при $u = 0$ имеет максимум $f_{\max} = a^{-2}$, а при $u = \frac{1}{3m}$ минимум $f_{\min} = a^{-2} - \frac{1}{27m^2}$. Поэтому полином $f(u)$ имеет: 1) при $a < 3\sqrt{3}m$ один вещественный отрицательный корень; 2) при $a = 3\sqrt{3}m$ один отрицательный корень $-\frac{1}{6m}$ и один двойной положительный корень $\frac{1}{3m}$; 3) при $a >$

$> 3\sqrt{3}m$ — один отрицательный корень и два положительных, из которых один находится в промежутке от нуля до $\frac{1}{3m}$, а другой превосходит $\frac{1}{3m}$.

Для лучей, расположенных вне гравитационной сферы, переменная u отвечает условию $u \leq \frac{1}{2m}$ и может принимать лишь такие значения, при которых полином $f(u)$ неотрицателен. Поэтому переменная u может совпасть только с двойным корнем уравнения $f(u) = 0$ при $a = 3\sqrt{3}m$ или с меньшим из положительных корней при $a > 3\sqrt{3}m$.

Переходим к исследованию формы луча. Согласно уравнению (6,6,3), имеем

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 = f(u); \quad \frac{d^2u}{d\varphi^2} = \frac{1}{2} f'(u).$$

Эти равенства показывают, что переменная u имеет максимум при $f(u) = 0$, $f'(u) < 0$. Если $a = 3\sqrt{3}m$, то переменная u может совпасть лишь с двойным корнем полинома $f(u)$, когда выполняются равенства $f(u) = f'(u) = 0$. В этом случае u является монотонной функцией полярного угла. Если же $a > 3\sqrt{3}m$, то указанные условия максимума выполняются при значении u , равном меньшему из положительных корней полинома $f(u)$; переменная u имеет в этом случае максимум, заключенный внутри интервала от нуля до $\frac{1}{3m}$.

Рассмотрим случай $a \leq 3\sqrt{3}m$. Если $a = 0$, то, согласно (6,6,1), имеем $\varphi = \text{const}$: луч распространяется прямолинейно. Уравнение (6,6, 2) при соответствующем направлении распространения принимает вид

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right)$$

и имеет интеграл $e^r (r - 2m)^{2m} = Ce^{-t}$, где C — постоянная интегрирования. Положив $t \rightarrow \infty$, находим $r \rightarrow 2m$: световой луч асимптотически приближается к гравитационной поверхности.

Если $a = 3\sqrt{3}m$, то уравнение луча (6,6,3) допускает решение $u = \text{const} = \frac{1}{3m}$, определяющее круговую траекторию. Общее решение в этом случае таково:

$$\varphi = \text{const} + \ln \frac{\sqrt{3} + \sqrt{6mu + 1}}{\sqrt{3} - \sqrt{6mu + 1}}$$

и при $u \rightarrow \frac{1}{3m}$ дает $\varphi \rightarrow \infty$, показывая, что луч распространяется

по спирали, асимптотически приближающейся к окружности $u = \frac{1}{3m}$.

При $0 < a < 3\sqrt{3}m$ находим

$$t = \text{const} + a^{-1} \int_{u_0}^u \frac{du}{u^2 (1 - 2mu) \sqrt{f(u)}}.$$

Здесь u определяется положением источника излучения. При всяком $u < \frac{1}{2m}$ интеграл, а следовательно, и время распространения луча, остаются конечными. Если же $u \rightarrow \frac{1}{2m}$, то интеграл не-

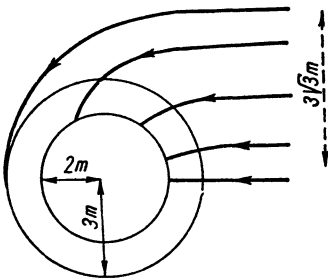


Рис. 22.

ограниченно возрастает, вследствие чего $t \rightarrow \infty$. Световой луч заканчивается на гравитационной поверхности. Полярный угол конечной точки луча находится по формуле

$$\varphi = \varphi_0 + \int_{u_0}^{\frac{1}{2m}} \frac{du}{\sqrt{f(u)}},$$

вытекающей из уравнений (6,6,3).

На рис. 22 изображены лучи при $0 \leq a \leq 3\sqrt{3}m$.

Переходим к случаю $a > 3\sqrt{3}m$, когда луч имеет экстремальную точку. Значения переменных φ , u , соответствующие этой точке, обозначим через φ_m , u_m . Полярные углы φ , φ' точек, лежащих по обе стороны от точки экстремума, определяются формулами

$$\varphi = \varphi_0 + \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}};$$

$$\varphi' = \varphi_0 + 2 \int_0^{u_m} \frac{du}{\sqrt{f(u)}} - \int_0^u \frac{du}{\sqrt{f(u)}}.$$

Через φ_0 обозначен полярный угол начальной точки $u = 0$.

В рассматриваемом случае полином $f(u)$ имеет три вещественных корня. Обозначим их в порядке возрастания через u_1 , u_2 , u_3 и введем новую переменную Φ при помощи соотношения

$$u = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi,$$

из которого получаем

$$\sqrt{f(u)} = (u_2 - u_1) \sqrt{2m(u_3 - u_1)(1 - k^2 \sin^2 \Phi)} \sin \Phi \cos \Phi,$$

$$k^2 = \frac{u_2 - u_1}{u_3 - u_1}.$$

Принимая во внимание, что $u_m = u_2$, можно переписать уравнение луча следующим образом:

$$\Phi = \Phi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right);$$

$$\Phi' = \Phi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(2 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right), \quad (6,6,4)$$

где для краткости принято $\Delta\Phi = \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \Phi}$, а через Φ_0 обозначена величина новой переменной, отвечающая $u = 0$.

Пусть Φ'_0 — полярный угол второй бесконечно удаленной точки луча. Значение его находится из (6,6,4) при $\Phi = \Phi_0$. Разность полярных углов асимптотических направлений определяется соотношением

$$\Phi'_0 - \Phi_0 = \frac{4}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (6,6,5)$$

Если a достаточно близко к $3\sqrt{3}m$, то эта разность может быть сколь угодно большой. Действительно, при $a \rightarrow 3\sqrt{3}m$ имеем $u_1 \rightarrow -\frac{1}{6m}$, $u_2 \rightarrow u_3 \rightarrow \frac{1}{3m}$, вследствие чего $k^2 \rightarrow 1$, $\Phi_0 \rightarrow \arcsin \frac{1}{\sqrt{3}}$. Поэтому полный эллиптический интеграл в (6,6,5) неограниченно возрастает, тогда как неполный стремится к конечному пределу.

Обозначим через n целое число, удовлетворяющее при данном a условию

$$2n\pi < \Phi'_0 - \Phi_0 < 2(n+1)\pi.$$

Луч имеет n двойных точек. Соответствующие им значения переменной Φ определяются формулами

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \frac{\pi i}{2} \sqrt{2m(u_3 - u_1)}; \quad i = 1, \dots, n, \quad (6,6,6)$$

которые легко находятся из (6,6,4), если положить $\varphi' - \varphi = 2\pi i$. Вычисление этих значений не представляет затруднений.

Отыскав корни функции $f(u)^*$ и вычислив модуль эллиптического интеграла, найдем n значений интеграла $\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi}$ с помощью соотношений (6,6,6). Входя затем в таблицу эллиптических интегралов с

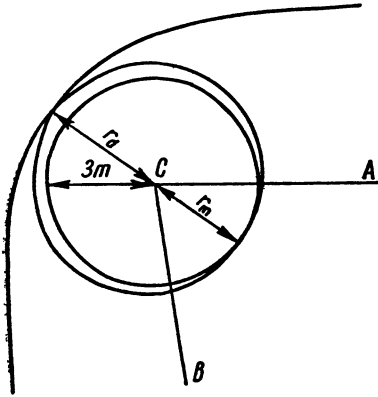


Рис. 23.

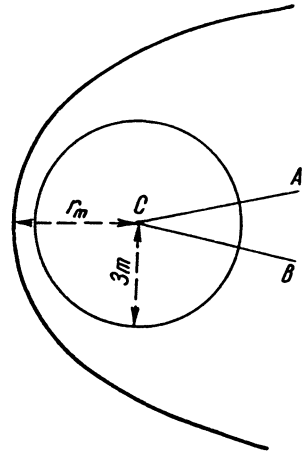


Рис. 24.

данным k , получим искомые величины переменной Φ_i . Координаты двойных точек определяются следующим образом:

$$u_i = u_1 + (u_2 - u_1) \sin^2 \Phi_i; \quad \varphi_i = \frac{1}{2} (\varphi_0 + \varphi'_0) - \pi i.$$

На рис. 23 изображен луч, имеющий одну двойную точку. C — центр поля; CA и CB — асимптотические направления. При построении графика принято: $m = 2,5$, $a = 12,995$, $\varphi_0 = 0$. Вычисления дают: $\varphi' = 640^\circ$, $r_1 = 8,55$, $\varphi_1 = 140^\circ$, $r_m = 7,6$, $\varphi_m = 320^\circ$.

Если при заданном $a > 3\sqrt{3}m$ окажется, что $\varphi_0 - \varphi'_0 = 2\pi$, то асимптотические направления совпадают: луч имеет бесконечно удаленную двойную точку.

На рис. 24 изображен луч без двойных точек. При вычислении принято: $m = 2,5$, $a = 13,7$.

* Это можно сделать по формулам

$$u = \frac{1}{6m} \left(1 + 2 \cos \frac{\psi + 2\pi i}{3} \right); \quad i = 0,1,2,$$

$$\text{где} \quad \cos \psi = 1 - 54 \frac{m^2}{a^2}.$$

Предположим, что $m \ll a$. В этом случае для корней полинома $f(u)$ можно принять приближенные значения

$$u_1 = \frac{m}{a^2} - \frac{1}{a}; \quad u_2 = \frac{m}{a^2} + \frac{1}{a}; \quad u_3 = \frac{1}{2m} - \frac{2m}{a^2},$$

при помощи которых находим

$$\frac{1}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} = 1 - \frac{m}{a}; \quad k^2 = \frac{4m}{a}; \quad \Phi_0 = \frac{\pi}{4} - \frac{m}{2a};$$

$$\int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{\pi}{4} \left(1 + \frac{m}{a}\right) - \frac{m}{a}; \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \frac{\pi}{2} \left(1 + \frac{m}{a}\right).$$

Угол между асимптотическими направлениями (6,6,5) оказывается равным

$$\theta = \frac{4m}{a}. \quad (6,6,7)$$

Этой формулой Эйнштейна [1] определяется основной оптический эффект ОТО — искривление светового луча, проходящего вблизи массивного тела. В единицах системы CGS формула Эйнштейна имеет вид

$$\theta = \frac{4\gamma M}{c^2 a}. \quad (6,6,8)$$

Для луча, касательного к краю Солнца, угол отклонения составляет $1''.75$.

Найдем приближенное уравнение луча при $m \ll a$.

Как указывалось, экстремальная точка луча определяется условием $u = u_2$, из которого следует $\Phi = \frac{\pi}{2}$. Для полярного угла этой точки каждая из формул (6,6,4) дает

$$\Phi_m = \Phi_0 + \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi_0} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right).$$

Поэтому обе формулы можно заменить одним уравнением

$$\pm (\Phi - \Phi_m) = \frac{2}{\sqrt{2m(u_3 - u_1)}} \left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} - \int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} \right). \quad (6,6,9)$$

Входящий в это равенство эллиптический интеграл приближенно выражается формулой

$$\int_0^{\Phi} \frac{d\Phi}{\Delta\Phi} = \Phi \left(1 + \frac{m}{a}\right) - \frac{m}{a} \sin \Phi \cos \Phi.$$

Следовательно, вместо (6,6,9) можно написать следующее приближенное уравнение:

$$\pm (\varphi - \varphi_m) = \pi - 2\Phi + \frac{m}{a} \sin 2\Phi,$$

откуда с той же степенью точности вытекает

$$\cos(\varphi - \varphi_m) = -\cos 2\Phi - \frac{m}{a} \sin^2 2\Phi.$$

Ограничиваясь первой степенью отношения $\frac{m}{a}$, имеем

$$\cos(\varphi - \varphi_m) = -\cos 2\Phi - \frac{m}{a} \sin^2(\varphi - \varphi_m).$$

Исключив переменную Φ , окончательно получим

$$u = \frac{1}{\rho} + \frac{1}{a} \cos(\varphi - \varphi_m), \quad (6,6,10)$$

где принято

$$\rho = \frac{a^2}{m} [1 + \sin^2(\varphi - \varphi_m)].$$

Вблизи центра гравитации, когда $\varphi - \varphi_m \simeq 0$, кривая (6,6,10) отвечает уравнению

$$r = \frac{\frac{a^2}{m}}{1 + \frac{a}{m} \cos(\varphi - \varphi_m)}$$

и совпадает с гиперболой, имеющей эксцентриситет $\frac{a}{m}$ и вещественную полуось m .

Вдали от центра, когда $\varphi - \varphi_m \simeq \frac{\pi}{2}$, световой луч имеет форму гиперболы

$$r = \frac{\frac{2a^2}{m}}{1 + \frac{2a}{m} \cos(\varphi - \varphi_m)}$$

с эксцентриситетом $\frac{2a}{m}$ и вещественной полуосью $\frac{m}{2}$.

Угол между асимптотами первой гиперболы равен $\theta_1 = \frac{2m}{a}$, тогда как асимптоты второй гиперболы образуют угол $\theta_2 = \frac{4m}{a}$, совпадающий с (6,6,7). На рис. 25 изображены обе предельные гиперболы и расположенный между ними луч. Графики построены для $m = 2,5$, $a = 10$.

В принятом приближении первая гипербола совпадает с ньютоновой. Действительно, уравнение гиперболической орбиты в поле тяготения центральной массы M имеет вид

$$r = \frac{A(e^2 - 1)}{1 + e \cos(\varphi - \varphi_m)},$$

где действительная полуось A связана со скоростью соотношением

$$v^2 = \gamma M \left(\frac{2}{r} + \frac{1}{A} \right),$$

а эксцентриситет выражается формулой

$$e = \frac{\sqrt{A^2 + a^2}}{A},$$

в которой a — длина перпендикуляра, опущенного из фокуса на асимптоту.

Положив $v = c$ при $r = \infty$ и вводя релятивистские единицы, получим $A = \frac{\gamma M}{c^2} = m$, $e = \frac{\sqrt{m^2 + a^2}}{m} = \frac{a}{m}$.

Искривление световых лучей вблизи массивного тела является одним из основных эффектов ОТО, доступных эмпирической проверке. Угол отклонения луча определяют, измеряя смещения звезд на фотографиях, сделанных во время полного солнечного затмения.

Наибольшее смещение ($1''.75$) должна испытать звезда, наблюдающаяся непосредственно у края солнечного диска. Однако практически приходится довольствоваться звездами, расположенными на тех или других расстояниях от края Солнца. Измеренные при этом смещения нетрудно редуцировать на край солнечного диска.

Впервые формула (6,6,8) проверялась по наблюдениям солнечного затмения 29 мая 1919 г. Измерение фотографий, сделанных на трех различных инструментах, позволило получить три независимые оценки. Две из них составили $1''.98 \pm 0''.12$ и $1''.61 \pm 0''.3$, что очень хорошо согласуется с теоретическим значением. Третья дала $0''.86 \pm 0''.1$, т. е. только половину ожидаемого значения. Однако эта оценка считается гораздо менее уверенной, поскольку она основана на фотографии, полученной в очень неблагоприятных условиях.

Новые определения были основаны на наблюдениях солнечного затмения 21 сентября 1922 г. экспедицией Ликской обсерватории. Их результаты ($1''.75 \pm 0''.3$, $1''.77 \pm 0''.3$; $1''.72 \pm 0''.11$; $1''.82 \pm 0''.15$) превосходно согласуются с формулой (6, 6, 8). Вместе с тем измерение фотографий, полученных на Суматре экспедицией Фрейнд-

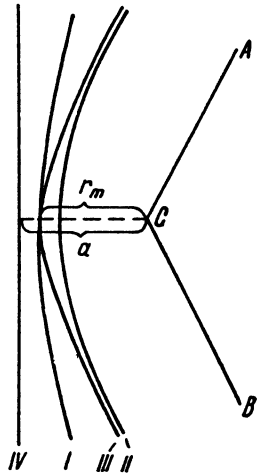


Рис. 25.

лиха во время солнечного затмения 9 мая 1929 г., привело к получению величины $2'',24 \pm 0'',10$, которая почти в полтора раза превосходит теоретическую. Чрезмерно большой угол отклонения получил также А. А. Михайлов, наблюдавший затмение 19 июня 1936 г. ($2'',74 \pm 0'',26$).

Как полагают, значительные ошибки в определении смещения звезд могут быть вызваны разностью атмосферной рефракции в момент затмения и в день, когда для сравнения производилось контрольное фотографирование того же участка неба. Во всяком случае, учитывая результаты других измерений (например, Ван-Бисбрука, который по наблюдению затмения 25 февраля 1952 г. в Хартуме получил $1'',70 \pm 0'',10$), в настоящее время нельзя высказать обоснованные сомнения в правильности формулы (6,6,8). Только новые наблюдения и их тщательная обработка могут привести к окончательному решению вопроса.

7. Принцип Допплера. В формулировке СТО принцип Допплера связывает частоты или длины волн излучения, измеренные движущимися друг относительно друга наблюдателями. Если один из наблюдателей неподвижен по отношению к источнику излучения, то этот принцип представляет собой соотношение между собственной длиной волны (т. е. длиной волны, измеренной в системе отсчета источника) и длиной волны, которая измерена наблюдателем, движущимся с заданной относительной скоростью.

В ОТО длина волны излучения зависит не только от скоростей источника и наблюдателя в моменты излучения и наблюдения светового импульса соответственно, но также от геометрии пространственно-временного континуума, т. е. от поля гравитации.

Пусть геометрия пространственно-временного континуума задана метрическим тензором g_{ij} . В точке x_1^σ континуума источник радиации, движущийся со скоростью $\left(\frac{dx^\sigma}{dx^4}\right)_1$, излучает световой импульс с периодом τ_1 . В точке x_2^σ излученный импульс принимается наблюдателем, который движется со скоростью $\left(\frac{dx^\sigma}{dx^4}\right)_2$ и характеризует этот импульс периодом τ_2 . Как и в дорелятивистской теории, отношение периодов можно заменить отношением соответствующих длин волн. Действительно, если бы излученный и наблюдаемый периоды совпали, то наблюдатель приписал бы световому импульсу длину волны $\lambda = \tau_1 V$, где V — скорость света в точке наблюдения. Измеренному периоду τ_2 соответствует длина волны $\lambda + \delta\lambda = \tau_2 V$. Следовательно,

$$\frac{(\lambda + \delta\lambda)}{\lambda} = \frac{\tau_2}{\tau_1}.$$