В этой важной работе показано, что перечисленные три условия (гармоничность координат, псевдоэвклидова метрика на бесконечности, условие излучения) с точностью до преобразования Лоренца определяют координаты, инерциальные для рассматриваемой системы тел. В таких координатах Солнечная система отвечает учению Коперника. Это заключение показывает, что уравнения поля ОТО допускают выбор группы систем отсчета, которые в данном приближении играют роль инерциальных координат. Однако такой вывод не решает проблемы гелиоцентризма Солнечной системы, поскольку материальная обусловленность указанной группы систем отсчета остается невыясненной. Привилегированность этих систем обусловлена, как мы видели, внешними космическими массами.

9. Импульс и энергия поля гравитации. Переходим к вопросу о количестве движения и энергии гравитационного поля, имеющему в ОТО большое принципиальное значение.

В теории Ньютона важными характеристиками механической системы являются понятия количества движения и энергии, которые при определенных условиях удовлетворяют известным законам сохранения. Пусть, например, дана система материальных точек, взаимодействующих по закону тяготения Ньютона и не испытывающих действия со стороны внешних сил и каких-либо сил другой природы. Обозначив массы материальных точек через m_i, а их декартовы координаты через x_i, y_i, z_i, можно написать закон движения так:

$$m_i\ddot{x}_i = -\frac{\partial U}{\partial x_i}; \quad m_i\ddot{y}_i = -\frac{\partial U}{\partial y_i}; \quad m_i\ddot{z}_i = -\frac{\partial U}{\partial z_i},$$

где U — потенциальная энергия системы, обусловленная гравитационным притяжением между всеми ее частицами и заданная известной формулой

$$U = -\frac{1}{2}\sum_{i,j}\frac{\gamma m_i m_j}{r_{ij}}.$$

Пользуясь этим законом движения, нетрудно показать, что величины

$$P_1 = \sum m_i\dot{x}_i; \quad P_2 = \sum m_i\dot{y}_i; \quad P_3 = \sum m_i\dot{z}_i;$$

$$E = \sum \frac{1}{2} m_i v_i^2 + U \tag{6,9,1}$$

остаются при движении системы постоянными. Первые три из них представляют собой проекции вектора количества движения, последняя равна полной энергии системы.

В более общей форме, пригодной как в случае дискретного, так и непрерывного распределения масс, выражение для гравитационной энергии системы можно написать следующим образом:

$$U = -\frac{1}{2}\int \varphi\rho d\tau, \tag{6,9,2}$$

где ρ — объемная плотность массы, φ — гравитационный потенциал, $d\tau$ — элемент объема.

Гравитационная энергия (6,9,2) принадлежит данной механической системе в целом, и вопрос о более точной локализации этой энергии или ее частей не имеет сколько-нибудь существенного значения. Во всяком случае, с точки зрения механики Ньютона энергию гравитационных взаимодействий не следует, вероятно, относить к полю тяготения как таковому, т. е. считать, что она принадлежит пространству, в котором проявляется гравитационное действие тел данной механической системы. В то же время количественная оценка величины (6,9,2) может быть выполнена путем интегрирования по всему пространству, в соответствии с чем имеется формальная возможность приписать эту величину полю гравитации и ввести понятие плотности энергии поля.

Учитывая уравнение Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\gamma\rho$, можно переписать соотношение (6,9,2) в виде

$$U = \frac{1}{8\pi\gamma}\int \varphi\nabla^2\varphi d\tau.$$

Если воспользоваться формулой векторного анализа

$$\operatorname{div}(\varphi \operatorname{grad}\varphi) = (\operatorname{grad}\varphi)^2 + \varphi\nabla^2\varphi,$$

то получится

$$U = \frac{1}{8\pi}\int \operatorname{div}(\varphi\operatorname{grad}\varphi)\, d\tau - \frac{1}{8\pi\gamma}\int f^2 d\tau,$$

где через $\mathbf{f} = \operatorname{grad}\varphi$ обозначена напряженность поля тяготения.

Первый из интегралов правой части можно преобразовать по формуле Остроградского — Гаусса в поверхностный интеграл

$$\int_S \varphi(\operatorname{grad}\varphi)_n\, dS,$$

взятый по любой замкнутой поверхности, заключающей рассматриваемую механическую систему. Поскольку в (6,9,2) интегрировать можно по всему пространству, поверхность S можно отождествить со сферой бесконечно большого радиуса, вследствие чего $(\operatorname{grad}\varphi)_n = 0$. Поэтому

$$U = -\frac{1}{8\pi\gamma}\int f^2 d\tau; \tag{6,9,3}$$

это и доказывает наше утверждение. Гравитационная энергия системы тел находится путем интегрирования квадрата напряженности поля по всему пространству; величину $-\frac{f^2}{8\pi\gamma}$ можно назвать плотностью энергии поля.

Естественно поставить вопрос о том, можно ли ввести понятие импульса и энергии гравитационного поля в ОТО. При этом необходимо потребовать, чтобы эти определения позволили выполнить релятивистское обобщение законов сохранения механики Ньютона.

В СТО, где гравитационные взаимодействия не учитываются, релятивистское определение импульса и энергии механической системы имеет, согласно (5,4,6), следующий вид:

$$P_i = \int T_i^4 d\tau, \tag{6,9,4}$$

где T_i^4 — смешанные компоненты тензора энергии-импульса, контравариантные компоненты которого находятся при помощи (5,4,2).

При $i = 1, 2, 3$ P_i определяют количество движения системы, P_4 — полная масса (энергия) системы. Как уже отмечалось в главе V, п. 4, исчезновение дивергенции тензора энергии-импульса, т. е. условие

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0; \quad i = 1, \ldots, 4, \tag{6,9,5}$$

которое мы назвали законом сохранения этого тензора, обеспечивает постоянство каждой из величин (6,9,4).

В ОТО закон сохранения тензора энергии-импульса имеет более сложную форму, требуя исчезновения его ковариантной дивергенции

$$T_{i/\alpha}^\alpha = 0; \quad i = 1, \ldots, 4. \tag{6,9,6}$$

Это условие уже не обеспечивает постоянства интегралов $\int T_i^4 d\tau$. Таким образом, при учете гравитационных взаимодействий определение (6,9,4) оказывается непригодным, поскольку оно не удовлетворяет законам сохранения. В частности, интеграл $\int T_4^4 d\tau$ не может служить мерой энергии механической системы в ОТО. Необходимо найти обобщение, которое обеспечивает выполнимость законов сохранения при римановой метрике пространственно-временного континуума и, в случае квадратической формы Минковского, переходит в интеграл (6,9,4).

Введем смешанный тензор второго порядка

$$F_i^k = T_i^k \sqrt{-g} \tag{6,9,7}$$

и составим дивергенцию

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \sqrt{-g}\,\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha}\, T_i^\alpha.$$

Условие (6,9,6) в развернутой форме таково:

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} T_i^\beta - \Gamma^\beta_{\alpha i} T_\beta^\alpha = 0.$$

Если внести сюда соотношение

$$\Gamma^\alpha_{\alpha\beta} = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\beta},$$

вытекающее из определения символа Кристофеля, то получится

$$\frac{\partial T_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^\alpha} T_i^\alpha + \Gamma^\alpha_{i\beta} T_\alpha^\beta.$$

Следовательно,

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \Gamma^\alpha_{i\beta} F_\alpha^\beta.$$

Напишем символ Кристофеля в развернутой форме и выполним указанное в правой части равенства суммирование. После очевидного упрощения предыдущее соотношение примет следующий вид:

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^i} F_\alpha^\beta,$$

или, если воспользоваться тождеством

$$g^{\alpha\gamma} \frac{\partial g_{\beta\gamma}}{\partial x^i} + g_{\beta\gamma} \frac{\partial g^{\alpha\gamma}}{\partial x^i} = 0,$$

которое непосредственно вытекает из равенства $g^{\alpha\gamma} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha_\beta$,

$$\frac{\partial F_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i}. \tag{6,9,8}$$

Введем теперь систему двухзначных величин t_i^α, подчинив их уравнениям

$$\frac{\partial t_i^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} \frac{\partial g^{\alpha\beta}}{\partial x^i} \tag{6,9,9}$$

и требованию, чтобы при эвклидовой метрике пространства-времени эти величины имели в галилеевых координатах нулевые значения. Возможность такого выбора величин t_i^α выяснится ниже, когда для них будут составлены соответствующие формулы.

Сравнивая (6,9,8) и (6,9,9), находим соотношение

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha} (F_i^\alpha + t_i^\alpha) = 0, \tag{6,9,10}$$

аналогичное закону сохранения (6,9,5) СТО.

Образуем величины

$$P_i = \int (F_i^4 + t_i^4)\, d\tau, \tag{6,9,11}$$

в которых интегрирование выполняется по всему пространству.

Приложим (6,9,11) к конечной механической системе. Необходимо учитывать, что F_i^4 отличны от нуля лишь в тех областях пространства, где $T_i^4 \neq 0$, т. е. внутри тел рассматриваемой системы. Величины t_i^4 могут иметь отличные от нуля значения на всех конечных расстояниях от системы тел, но в бесконечно удаленных точках, где метрика пространства-времени является эвклидовой, они принимают, по условию, нулевые значения. Поэтому, повторяя рассуждения главы V, п. 4, можно убедиться в том, что соотношение (6,9,10) является условием постоянства четырех величин (6,9,11). Последние и представляют собой обобщенные выражения количества движения и полной энергии (массы) механической системы, отвечающие законам сохранения ОТО.

При переходе к СТО, когда гравитация не учитывается и метрика пространственно-временного континуума считается эвклидовой, эти выражения переходят в галилеевых координатах непосредственно в (6,9,4), а обобщенный закон сохранения (6,9,10) превращается в (6,9,5).

Итак, в ОТО количество движения и энергия механической системы определяются не только тензором F_i^k, характеризующим распределение и движение тел этой системы, но и величинами t_i^k, которые отличны от нуля также вне тел и являются некоторой характеристикой созданного системой тел поля гравитации. Рассмотрим эти величины подробнее.

Согласно (6,9,9), имеем

$$\frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{1}{2}\sqrt{-g}\,T_{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}.$$

Входящий в правую часть этого равенства тензор энергии-импульса выразим через компоненты метрического тензора и их производные, воспользовавшись уравнениями поля в форме (5,7,7). Выполнив подстановку, получим

$$16\pi\frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = -\sqrt{-g}\left(\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} - \frac{1}{2}g^{\sigma\tau}g_{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} - \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}}\right). \tag{6,9,12}$$

После преобразования

$$g_{ij}\frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = -g^{ij}\frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} = -\frac{1}{g}\frac{\partial g}{\partial x^k},$$

основанного на известном правиле дифференцирования определителя, можно написать

$$\frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} - \frac{1}{2} g^{\sigma\tau} g_{ij} \frac{\partial g^{ij}}{\partial x^k} = \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} + \frac{1}{2} \frac{g^{\sigma\tau}}{g} \frac{\partial g}{\partial x^k} =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} \left(\sqrt{-g} \frac{\partial g^{\sigma\tau}}{\partial x^k} + g^{\sigma\tau} \frac{\partial \sqrt{-g}}{\partial x^k} \right) = \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{-g} g^{\sigma\tau}) =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-g}} q_k^{\sigma\tau},$$

где, как и в главе V (см. (5,7,2)), приняты обозначения

$$q^{ij} = g^{ij} \sqrt{-g}; \qquad q_k^{ij} = \frac{\partial q^{ij}}{\partial x^k}.$$

Теперь равенство (6,9,12) можно представить в виде

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = - q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} + q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} =$$

$$= - \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \right) + \frac{\partial L}{\partial q^{\sigma\tau}} q_k^{\sigma\tau} + \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} \frac{\partial q_k^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha}.$$

Функция Лагранжа выражена через величины $q^{\sigma\tau}$ и $q_\alpha^{\sigma\tau}$. Поэтому, принимая во внимание очевидное соотношение

$$\frac{\partial q_k^{\sigma\tau}}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}}{\partial x^k},$$

легко видеть, что сумма двух последних членов предыдущего равенства представляет собой производную

$$\frac{\partial L}{\partial x^k} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} (\delta_k^\alpha L).$$

Следовательно,

$$16\pi \frac{\partial t_k^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(- q_k^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_\alpha^{\sigma\tau}} + \delta_k^\alpha L \right). \qquad (6,9,13)$$

Полученное уравнение эквивалентно основному условию (6,9,9), которому должна отвечать система величин t_j^i. С точностью до члена с исчезающей расходимостью решением этого уравнения является

$$16\pi t_j^i = - q_j^{\sigma\tau} \frac{\partial L}{\partial q_i^{\sigma\tau}} + \delta_j^i L. \qquad (6,9,14)$$

Нетрудно убедиться в том, что (6,9,14) удовлетворяет и второму условию, предусмотренному в определении величин t_j^i: при эвклидовой метрике пространства-времени эти величины принимают в галилеевых координатах нулевые значения.

Итак, мы нашли систему двухзначковых величин t^i_j, которые позволяют составить обобщенные выражения количества движения и энергии механической системы, отвечающие законам сохранения ОТО.

Необходимо подчеркнуть, что совокупность этих величин не образует тензора. Если воспользоваться определением (6,9,14) в другой системе координат, то вычисленные таким образом величины $t^{i'}_{j'}$ не будут связаны с t^i_j обычными формулами преобразования тензора второго порядка. Для доказательства этого нет необходимости выполнять подробные вычисления. Достаточно вспомнить, что всегда имеется возможность найти систему координат, которая является галилеевой в какой-либо произвольно выбранной точке пространственно-временного континуума. Согласно определению (6,9,14), в этой точке выполняется равенство $t^i_j = 0$. Если бы величины t^i_j составляли тензор, то уравнение $t^i_j = 0$ имело бы место в данной точке во всех системах координат. Между тем известно, что в общих координатах $t^i_j \neq 0$, что и свидетельствует о нетензорной природе рассматриваемых величин.

Величины t^i_j выражают влияние гравитационных взаимодействий на количество движения и энергию (массу) системы. Совокупность этих величин принято называть псевдотензором энергии-импульса гравитационного поля. Если допустить, что тензор T^i_j определяет количество движения и энергию системы масс (с учетом соответствующей метрики пространственно-временного континуума), то псевдотензор t^i_j должен определять импульс и энергию гравитационного поля этой системы. Однако такое утверждение условно. Не следует забывать, что совокупность величин t^i_j представляет собой формальную поправку к тензору энергии-импульса, введение которой продиктовано стремлением обеспечить сохранение импульса и энергии системы гравитирующих масс. Нетензорный характер этой поправки не позволяет приписать ей непосредственный физический смысл, поскольку в ОТО физические величины должны иметь тензорную природу.

Введенные с помощью соотношений (6,9,11) величины P_i следует рассматривать как некоторые количественные характеристики механической системы в целом, включая в понятие системы не только входящие в ее состав тела, но также связанную с ними метрику пространства-времени, а следовательно, и гравитацию.

В качестве иллюстрации вычислим энергию стационарной системы в ньютоновом приближении.

Пользуясь релятивистскими единицами, квадратическую форму, отвечающую статическому полю рассматриваемой системы, можно написать в виде

$$ds^2 = -(1+2\varphi)(dx^2+dy^2+dz^2)+(1-2\varphi)\,dt^2, \qquad (6,9,15)$$

где φ — ньютонов потенциал.

Обозначим через ρ_0 собственную плотность. Масса системы, вычисленная без учета гравитации, равна $m_0 = \int \rho_0 d\tau$. В координатах x, y, z, отвечающих квадратической форме (6,9,15), элемент объема определяется формулой $d\tau = \sqrt{g}\,dxdydz$, где g — определитель 3-го порядка, образованный компонентами соответствующего метрического тензора трехмерного пространства. Внося $g=(1+2\varphi)^3$, получим с принятой точностью $\sqrt{g} = 1+3\varphi$, и, следовательно, $dxdydz = (1-3\varphi)\,d\tau$.

Согласно (6,9,11), полная энергия системы

$$P_4 = \iiint (F_4^4 + t_4^4)\,dxdydz.$$

В случае статической системы по формуле (5,4,1) имеем $T_4^4 = \rho_0$. Определитель четырехмерного метрического тензора, соответствующего квадратической форме (6,9,15), равен $g = -(1+4\varphi)$. Поэтому $F_4^4 = (1+2\varphi)\,\rho_0$. Псевдотензор энергии-импульса гравитационного поля находим по формуле (6,9,14), которая в нашем случае дает $t_4^4 = \frac{1}{16\pi}L$. Вычисление функции Лагранжа (5,7,1) применительно к квадратической форме (6,9,15) приводит к значению $L = 2\,(\mathrm{grad}\varphi)^2$. Следовательно, $t_4^4 = \frac{1}{8\pi}(\mathrm{grad}\,\varphi)^2$. Энергия системы равна

$$P_4 = \int \rho_0 d\tau - \int \varphi\rho_0 d\tau + \frac{1}{8\pi}\int (\mathrm{grad}\,\varphi)^2\,d\tau.$$

В двух последних интегралах с принятой степенью точности элемент объема можно отождествить с произведением $dxdydz$.

Воспользовавшись соотношением

$$(\mathrm{grad}\,\varphi)^2 = \mathrm{div}\,(\varphi\,\mathrm{grad}\,\varphi) - \varphi\nabla^2\varphi$$

и уравнением Пуассона $\nabla^2\varphi = -4\pi\rho_0$, получим

$$P_4 = m_0 - \frac{1}{2}\int \varphi\rho_0 d\tau + \frac{1}{8\pi}\int \mathrm{div}\,(\varphi\,\mathrm{grad}\,\varphi)\,d\tau.$$

С помощью преобразования Остроградского — Гаусса нетрудно убедиться в том, что последний интеграл, по условию, на бесконечности исчезает. Таким образом, окончательно имеем

$$P_4 = m_0 - \frac{1}{2}\int \varphi\rho_0 d\tau. \qquad (6,9,16)$$

В рассматриваемом приближении полная энергия (масса) системы отличается от величины m_0 потенциальной энергией гравитационных взаимодействий.

10. Гравитационные волны. При статическом распределении массы поле метрического тензора в данной системе отсчета неизменно. Примерами таких полей могут служить внешнее и внутреннее решения Шварцшильда, рассмотренные в главе V. Если же распределение масс переменно, то в гравитационном поле происходят соответствующие изменения. С точки зрения ОТО, такие изменения представляют собой возмущения метрики пространства-времени, которые, как мы видели в главе V, распространяются с конечной скоростью, равной скорости света. Особенный интерес представляют в этом отношении системы, в которых происходят периодические движения. В подобных случаях механическая система служит источником периодических изменений в метрике пространственно-временного континуума, получивших название гравитационных волн.

Гравитационные волны можно определить как возмущения метрики, которые распространяются с конечной скоростью и переносят энергию, вызывая соответствующую убыль энергии возбуждающей их системы

Вопрос о свойствах и особенностях распространения волн гравитации имеет значительный научный интерес. Однако в настоящее время само существование гравитационных волн нельзя считать бесспорно доказанным, поскольку их практическое наблюдение остается пока невозможным, а теоретические аргументы в пользу их существования не безукоризненны.

Впервые вопрос о гравитационных волнах в ОТО был рассмотрен Эйнштейном в 1916 г. на основе развитого им приближенного метода интегрирования уравнений поля [11]. Более точный анализ, дополненный рассмотрением излучения гравитационных волн и их действия на механические системы, выполнен Эйнштейном два года спустя [12]. В последующие десятилетия изучением гравитационных волн с точки зрения ОТО занимались многие авторы. Интерес к вопросу особенно усилился в последние годы, когда наряду с теоретическими исследованиями разрабатывались установки, предназначенные для практического обнаружения и генерации гравитационных волн. Современное состояние вопроса подробно изложено в монографии Д. Вебера [13].

Ниже рассматривается приближенное нестатическое решение уравнений поля, отвечающее плоским гравитационным волнам в вакууме.

Пусть метрика пространства-времени мало отличается от эвклидовой, вследствие чего можно принять $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где δ_{ij} — галилеевы значения компонент метрического тензора, соответству-