В рассматриваемом приближении полная энергия (масса) системы отличается от величины m_0 потенциальной энергией гравитационных взаимодействий.

10. Гравитационные волны. При статическом распределении массы поле метрического тензора в данной системе отсчета неизменно. Примерами таких полей могут служить внешнее и внутреннее решения Шварцшильда, рассмотренные в главе V. Если же распределение масс переменно, то в гравитационном поле происходят соответствующие изменения. С точки зрения ОТО, такие изменения представляют собой возмущения метрики пространства-времени, которые, как мы видели в главе V, распространяются с конечной скоростью, равной скорости света. Особенный интерес представляют в этом отношении системы, в которых происходят периодические движения. В подобных случаях механическая система служит источником периодических изменений в метрике пространственно-временного континуума, получивших название гравитационных волн.

Гравитационные волны можно определить как возмущения метрики, которые распространяются с конечной скоростью и переносят энергию, вызывая соответствующую убыль энергии возбуждающей их системы

Вопрос о свойствах и особенностях распространения волн гравитации имеет значительный научный интерес. Однако в настоящее время само существование гравитационных волн нельзя считать бесспорно доказанным, поскольку их практическое наблюдение остается пока невозможным, а теоретические аргументы в пользу их существования не безукоризненны.

Впервые вопрос о гравитационных волнах в ОТО был рассмотрен Эйнштейном в 1916 г. на основе развитого им приближенного метода интегрирования уравнений поля [11]. Более точный анализ, дополненный рассмотрением излучения гравитационных волн и их действия на механические системы, выполнен Эйнштейном два года спустя [12]. В последующие десятилетия изучением гравитационных волн с точки зрения ОТО занимались многие авторы. Интерес к вопросу особенно усилился в последние годы, когда наряду с теоретическими исследованиями разрабатывались установки, предназначенные для практического обнаружения и генерации гравитационных волн. Современное состояние вопроса подробно изложено в монографии Д. Вебера [13].

Ниже рассматривается приближенное нестатическое решение уравнений поля, отвечающее плоским гравитационным волнам в вакууме.

Пусть метрика пространства-времени мало отличается от эвклидовой, вследствие чего можно принять $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где δ_{ij} — галилеевы значения компонент метрического тензора, соответствующие СТО, h_{ij} — малые поправки к ним. В главе V, п. 5 было показано, что при некотором выборе координат тензор Риччи в линейном приближении определяется формулой

$$R_i^k = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 h_i^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial z^2}\right);$$

$$h_i^k = \delta^{kk} h_{ik}.$$

При этом уклонения h_i^k удовлетворяют дополнительному условию

$$\frac{\partial^2 h_i^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i} = 0; \quad h = \delta^{\alpha\alpha} h_{\alpha\alpha}. \tag{6,10,1}$$

Уравнения поля в вакууме приводятся в нашем случае к системе трехмерных волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial t^2} = 0, \tag{6,10,2}$$

описывающих некоторый волновой процесс, распространяющийся с единичной скоростью, т. е. со скоростью света.

Рассмотрим п л о с к и е гравитационные волны, отвечающие хорошо известному решению волнового уравнения

$$h_i^k = h_i^k(\theta); \quad \theta = t - k_1 x - k_2 y - k_3 z, \tag{6,10,3}$$

где k_1, k_2, k_3 — постоянные, удовлетворяющие условию $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$.

Поправки h_i^k определяются фазой θ, которая в данный момент имеет одинаковые значения во всех точках фазовой плоскости

$$k_1 x + k_2 y + k_3 z = t - \theta.$$

Величины k_1, k_2, k_3 представляют собой направляющие косинусы нормали к фазовой плоскости. Плоскость, соответствующая данному значению фазы, перемещается со скоростью света, сохраняя неизменную ориентировку в пространстве.

Система поправок h_{ik} должна удовлетворять условию (6,10,1)

$$\delta^{\alpha\alpha}\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2}\frac{\partial h}{\partial x^i} = 0, \text{ т. е. } \frac{\partial}{\partial x^\alpha}\left(\delta^{\alpha\alpha} h_{i\alpha} - \frac{1}{2}\delta_i^\alpha h\right) = 0.$$

Учитывая очевидные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\theta}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = -k_1\frac{d}{d\theta}, \ldots,$$

можно написать

$$k_1 \frac{d}{d\theta}\left(h_{i1} + \frac{1}{2}\delta_i^1 h\right) + k_2 \frac{d}{d\theta}\left(h_{i2} + \frac{1}{2}\delta_i^2 h\right) +$$
$$+ k_3 \frac{d}{d\theta}\left(h_{i3} + \frac{1}{2}\delta_i^3 h\right) + \frac{d}{d\theta}\left(h_{i4} - \frac{1}{2}\delta_i^4 h\right) = 0.$$

При изучении волновых процессов нас интересуют только переменные части соответствующих величин. Поэтому, опуская постоянные интегрирования, имеем

$$k_1\left(h_{i1} + \frac{1}{2}\delta_i^1 h\right) + k_2\left(h_{i2} + \frac{1}{2}\delta_i^2 h\right) +$$
$$+ k_3\left(h_{i3} + \frac{1}{2}\delta_i^3 h\right) + h_{i4} - \frac{1}{2}\delta_i^4 h = 0.$$

В развернутой форме эти условия принимают следующий вид:

$$k_1\left(h_{11} + \frac{1}{2} h\right) + k_2 h_{12} + k_3 h_{13} + h_{14} = 0;$$
$$k_1 h_{21} + k_2\left(h_{22} + \frac{1}{2} h\right) + k_3 h_{23} + h_{24} = 0;$$
$$k_1 h_{31} + k_2 h_{32} + k_3\left(h_{33} + \frac{1}{2} h\right) + h_{34} = 0; \qquad (6,10,4)$$
$$k_1 h_{41} + k_2 h_{42} + k_3 h_{43} + h_{44} - \frac{1}{2} h = 0.$$

Десять поправок к галилеевым значениям метрического тензора связаны четырьмя соотношениями (6,10,4); шесть поправок должны быть найдены независимо, с учетом структуры изучаемых волн.

Если гравитационные волны существуют как реальный физический процесс, связанный с переносом энергии, то генерирующая их механическая система должна испытывать убыль энергии. Дадим количественную оценку энергии гравитационного излучения. При этом необходимо иметь в виду, что приводимая здесь формула до некоторой степени условна, поскольку она основана на понятии псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, физический смысл которого остается, как указывалось выше, не вполне ясным.

Пусть источником волн гравитации служит изолированная механическая система, все члены которой находятся внутри некоторого конечного объема τ и не выходят за его пределы. Составим интеграл

$$E = \int (F_4^4 + t_4^4)\, d\tau, \qquad (6,10,5)$$

равный энергии системы, содержащейся в указанном объеме.

Естественно принять, что производная от этого интеграла по времени определяет убыль энергии системы вследствие гравитационного излучения.

Согласно закону сохранения (6,9,10), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_4^4 + t_4^4) = -\frac{\partial}{\partial x}(F_4^1 + t_4^1) - \frac{\partial}{\partial y}(F_4^2 + t_4^2) + \frac{\partial}{\partial z}(F_4^3 + t_4^3),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t}(F_4^4 + t_4^1) = -\operatorname{div}\mathbf{A},$$

где через $\mathbf{A}$ обозначен трехмерный вектор с проекциями $F_4^i + t_4^i$, $i = 1, 2, 3$.

Дифференцируя по времени интеграл (6,10,5), имеем

$$\frac{dE}{dt} = -\int\limits_\tau \operatorname{div}\mathbf{A}d\tau.$$

Воспользовавшись формулой Остроградского — Гаусса, получим

$$\frac{dE}{dt} = -\int\limits_S \mathbf{A}_n dS, \qquad (6,10,6)$$

где интегрирование выполняется по поверхности S, ограничивающей объем τ.

Поскольку тензор энергии-импульса во всех точках граничной поверхности равен нулю, вектор $\mathbf{A}$ в формуле (6,10,6) имеет проекции t_4^1, t_4^2, t_4^3. Этот вектор играет в нашей теории такую же роль, как вектор Пойтинга в электродинамике, хотя, в отличие от последнего, он не имеет, как уже сказано, ясного физического смысла. В частности, его модуль нельзя конечно отождествить с плотностью потока энергии в соответствующей точке.

Допустим, что излучающая гравитационные волны система сосредоточена вблизи начала координат, а поверхность S является сферой, радиус R которой весьма велик по сравнению с размерами системы. Во всех случаях, которые могут представить интерес, поле гравитации является слабым, и потому при вычислении потока (6,10,6) можно пользоваться обычными формулами эвклидовой геометрии. Направляющие косинусы внешней нормали к поверхности сферы равны k_1, k_2, k_3, элемент поверхности определяется произведением $R^2 d\omega$, где $d\omega$ — телесный угол, под которым этот элемент виден из начала координат. Вместо (6,10,6) можно написать

$$\frac{dE}{dt} = -R^2 \iint\limits_{4\pi} (k_1 t_4^1 + k_2 t_4^2 + k_3 t_4^3)\, d\omega. \qquad (6,10,7)$$

Применяя это уравнение, необходимо вычислить величины h_4^i, согласно соотношению (6,9,14), найдя предварительно решение уравнений поля для рассматриваемой механической системы.

Достаточную точность обеспечивает решение Эйнштейна (5,10,2), которое в нашем случае можно написать в виде

$$h_k^i - \frac{1}{2}\delta_k^i h = -\frac{4}{R}\iiint T_k^i(x', y', z', t-R)\,dx'dy'dz'. \qquad (6,10,8)$$

Однако и при таком упрощении вычисления остаются довольно громоздкими. С целью их дальнейшего упрощения считают, что на расстоянии R от излучающей системы гравитационные волны являются практически плоскими, а потому при вычислении t_4^i можно пользоваться решением вида (6,10,3). Обыкновенно принимают, что в излучающей системе происходят какие-либо периодические движения (системой является линейный осциллятор, вращающийся стержень, двойная звезда и т. п.). Поэтому периодическими функциями времени оказываются и величины t_4^i. Вследствие малости эффектов гравитационного излучения временны́е колебания не представляют интереса, поэтому в уравнение (6,10,7) вносят усредненные значения t_4^i.

Для выяснения принципиальной стороны вопроса дальнейшие технические подробности вычислений не имеют большого значения, и потому ввиду их сложности они здесь не приводятся. Вместе с тем мы укажем конечные результаты вычислений в двух простых случаях, которые могут служить характеристикой величины рассматриваемых эффектов.

Однородный прямолинейный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр стержня. Убыль энергии стержня, обусловленная излучением гравитационных волн, равна

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma}{5c^5}J^2\omega^6, \qquad (6,10,9)$$

где J — момент инерции стержня относительно указанной оси.

Эта формула показывает, что убыль энергии вследствие гравитационного излучения крайне мала. Сравнивая величину (6,10,9) с кинетической энергией стержня $E = \frac{1}{2}J\omega^2$, имеем

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} = -\frac{64\gamma}{5c^5}J\omega^4.$$

Для стержня с массой 1 *кг* и длиной 2 *м* при $\omega = 100\pi$ (50 *об/сек*) получаем

$$\frac{1}{E}\frac{dE}{dt} \simeq -1{,}1\cdot 10^{-42}\ \textit{сек}^{-1}.$$

В течение года ($3{,}1 \cdot 10^7$ *сек*) стержень должен потерять около $3 \cdot 10^{-35}$ своей вращательной энергии.

В качестве второго примера рассмотрим систему двух тел, обращающихся по круговым орбитам вокруг их общего центра тяжести. Потеря энергии такой системы (двойной звездой) определяется формулой

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma}{5c^5}\left(\frac{M_1M_2}{M_1+M_2}\right)^2 a^4\omega^6, \qquad (6{,}10{,}10)$$

где M_1, M_2 — массы тел, a — расстояние между ними, ω — угловая скорость.

Согласно третьему закону Кеплера,

$$\frac{a^3}{T^2(M_1+M_2)} = \frac{\gamma}{4\pi^2},$$

где T — период обращения.

Поэтому угловая скорость определяется соотношением $\omega^2 = \frac{\gamma(M_1+M_2)}{a^3}$. Следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma^4}{5c^5} M_1^2M_2^2(M_1+M_2)\,a^{-5}. \qquad (6{,}10{,}11)$$

Для примерной количественной оценки допустим, что расстояние между телами равно астрономической единице ($1{,}5 \cdot 10^{13}$ *см*), а массы тел одинаковы и равны массе Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ *г*). Потеря энергии составляет $4{,}5 \cdot 10^{20}$ *эрг/сек*$^{-1}$, т. е. около $1{,}4 \cdot 10^{28}$ *эрг* в год. Кинетическая энергия системы $\frac{\gamma M_1M_2}{2a}$ равна приблизительно $8{,}9 \cdot 10^{45}$ *эрг*. Поэтому гравитационное излучение, составляющее в год только $1{,}6 \cdot 10^{-18}$ кинетической энергии системы, в данном случае не может иметь никакого космогонического значения.

В принципе можно ожидать, что для очень тесных двойных звезд энергия гравитационного излучения весьма значительна. Например, если сохранить принятые оценки масс и допустить, что расстояние между звездами в тысячу раз меньше, то убыль энергии будет равна $4{,}5 \cdot 10^{35}$ *эрг/сек*$^{-1}$, т. е. в 120 раз больше светимости Солнца. В этом случае гравитационное излучение составит в год около $1{,}6 \cdot 10^{-6}$ кинетической энергии системы и может играть существенную роль в ее эволюции.

Для развития проблемы гравитационных волн решающее значение имело бы прямое эмпирическое доказательство их существования. В этом отношении большой интерес представляют попытки создания лабораторных установок, предназначенных для генерации и обнаружения гравитационных волн, в частности для приема гравитационного излучения космических источников. Однако имеющиеся проекты и создававшиеся до сих пор лабораторные приборы не обеспечивают практического осуществления экспериментов, и потому вопрос о существовании гравитационных волн еще не получил определенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **47**, 831, 1915. Русск. пер.: собр. научн. трудов, **1**, 439. «Наука», М., 1965.
2. А. Богородский. Циркуляр ГАО АН СССР, № 30, 1940; Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии, гл. III. Изд-во КГУ, К., 1962.
3. Y. Lense, H. Thirring.— Phys. Zeitschr., **19**, 156, 1918.
4. А. Богородский.— Астрон. журн., **36**, 883, 1959.
5. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1955.
6. А. Богородский.— Известия Ест.- научн. института Лесгафта, **23**, 21, 1940.
7. A. Einstein.— Annal. Phys., **49**, 769, 1916, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, **1**, 452. «Наука», М., 1965.
8. R. C. Tolman. Relativity, Thermodynamics and Cosmology, 288, Oxford, 1934.
9. А. Богородский.— Публикации Киев. астроном. обсерватории, **8**, 1959.
10. В. А. Фок.— Журн. эксперимент. теоретич. физики, **9**, 411, 1939.
11. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **1**, 688, 1916, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, **1**, 514. «Наука», М., 1965.
12. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **1**, 154, 1918, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, **1**, 631, «Наука», М., 1965.
13. J. Weber. General Relativity and Gravitational Waves. New York, 1961. Русск. пер.: Д. Вебер. Общая теория относительности и гравитационные волны. ИЛ, М., 1962.