

В рассматриваемом приближении полная энергия (масса) системы отличается от величины m_0 потенциальной энергией гравитационных взаимодействий.

10. Гравитационные волны. При статическом распределении массы поле метрического тензора в данной системе отсчета неизменно. Примерами таких полей могут служить внешнее и внутреннее решения Шварцшильда, рассмотренные в главе V. Если же распределение масс переменное, то в гравитационном поле происходят соответствующие изменения. С точки зрения ОТО, такие изменения представляют собой возмущения метрики пространства-времени, которые, как мы видели в главе V, распространяются с конечной скоростью, равной скорости света. Особенный интерес представляют в этом отношении системы, в которых происходят периодические движения. В подобных случаях механическая система служит источником периодических изменений в метрике пространственно-временного континуума, получивших название **г р а в и т а ц и о н н ы х в о л н**.

Гравитационные волны можно определить как возмущения метрики, которые распространяются с конечной скоростью и переносят энергию, вызывая соответствующую убыль энергии возбуждающей их системы

Вопрос о свойствах и особенностях распространения волн гравитации имеет значительный научный интерес. Однако в настоящее время само существование гравитационных волн нельзя считать бесспорно доказанным, поскольку их практическое наблюдение остается пока невозможным, а теоретические аргументы в пользу их существования не безукоризненны.

Впервые вопрос о гравитационных волнах в ОТО был рассмотрен Эйнштейном в 1916 г. на основе развитого им приближенного метода интегрирования уравнений поля [11]. Более точный анализ, дополненный рассмотрением излучения гравитационных волн и их действия на механические системы, выполнен Эйнштейном два года спустя [12]. В последующие десятилетия изучением гравитационных волн с точки зрения ОТО занимались многие авторы. Интерес к вопросу особенно усилился в последние годы, когда наряду с теоретическими исследованиями разрабатывались установки, предназначенные для практического обнаружения и генерации гравитационных волн. Современное состояние вопроса подробно изложено в монографии Д. Вебера [13].

Ниже рассматривается приближенное нестатическое решение уравнений поля, отвечающее плоским гравитационным волнам в вакууме.

Пусть метрика пространства-времени мало отличается от евклидовой, вследствие чего можно принять $g_{ij} = \delta_{ij} + h_{ij}$, где δ_{ij} — галилеевы значения компонент метрического тензора, соответству-

ющие СТО, h_{ij} — малые поправки к ним. В главе V, п. 5 было показано, что при некотором выборе координат тензор Риччи в линейном приближении определяется формулой

$$R_i^k = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h_i^k}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial z^2} \right);$$

$$h_i^k = \delta^{ik} h_{ik}.$$

При этом уклонения h_i^k удовлетворяют дополнительному условию

$$\frac{\partial^2 h_i^\alpha}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} = 0; \quad h = \delta^{\alpha\alpha} h_{\alpha\alpha}. \quad (6,10,1)$$

Уравнения поля в вакууме приводятся в нашем случае к системе трехмерных волновых уравнений

$$\frac{\partial^2 h_i^k}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial z^2} - \frac{\partial^2 h_i^k}{\partial t^2} = 0, \quad (6,10,2)$$

описывающих некоторый волновой процесс, распространяющийся с единичной скоростью, т. е. со скоростью света.

Рассмотрим плоские гравитационные волны, отвечающие хорошо известному решению волнового уравнения

$$h_i^k = h_i^k(\theta); \quad \theta = t - k_1 x - k_2 y - k_3 z, \quad (6,10,3)$$

где k_1, k_2, k_3 — постоянные, удовлетворяющие условию $k_1^2 + k_2^2 + k_3^2 = 1$.

Поправки h_i^k определяются фазой θ , которая в данный момент имеет одинаковые значения во всех точках фазовой плоскости

$$k_1 x + k_2 y + k_3 z = t - \theta.$$

Величины k_1, k_2, k_3 представляют собой направляющие косинусы нормали к фазовой плоскости. Плоскость, соответствующая данному значению фазы, перемещается со скоростью света, сохраняя неизменную ориентировку в пространстве.

Система поправок h_{ik} должна удовлетворять условию (6,10,1)

$$\delta^{\alpha\alpha} \frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\alpha} - \frac{1}{2} \frac{\partial h}{\partial x^i} = 0, \quad \text{т. е.} \quad \frac{\partial}{\partial x^\alpha} \left(\delta^{\alpha\alpha} h_{i\alpha} - \frac{1}{2} \delta_i^\alpha h \right) = 0.$$

Учитывая очевидные соотношения

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{d}{d\theta}; \quad \frac{\partial}{\partial x} = -k_1 \frac{d}{d\theta}, \dots,$$

можно написать

$$k_1 \frac{d}{d\theta} \left(h_{11} + \frac{1}{2} \delta_1^1 h \right) + k_2 \frac{d}{d\theta} \left(h_{12} + \frac{1}{2} \delta_1^2 h \right) + \\ + k_3 \frac{d}{d\theta} \left(h_{13} + \frac{1}{2} \delta_1^3 h \right) + \frac{d}{d\theta} \left(h_{14} - \frac{1}{2} \delta_1^4 h \right) = 0.$$

При изучении волновых процессов нас интересуют только переменные части соответствующих величин. Поэтому, опуская постоянные интегрирования, имеем

$$k_1 \left(h_{11} + \frac{1}{2} \delta_1^1 h \right) + k_2 \left(h_{12} + \frac{1}{2} \delta_1^2 h \right) + \\ + k_3 \left(h_{13} + \frac{1}{2} \delta_1^3 h \right) + h_{14} - \frac{1}{2} \delta_1^4 h = 0.$$

В развернутой форме эти условия принимают следующий вид:

$$k_1 \left(h_{11} + \frac{1}{2} h \right) + k_2 h_{12} + k_3 h_{13} + h_{14} = 0; \\ k_1 h_{21} + k_2 \left(h_{22} + \frac{1}{2} h \right) + k_3 h_{23} + h_{24} = 0; \\ k_1 h_{31} + k_2 h_{32} + k_3 \left(h_{33} + \frac{1}{2} h \right) + h_{34} = 0; \\ k_1 h_{41} + k_2 h_{42} + k_3 h_{43} + h_{44} - \frac{1}{2} h = 0. \quad (6,10,4)$$

Десять поправок к галилеевым значениям метрического тензора связаны четырьмя соотношениями (6,10,4); шесть поправок должны быть найдены независимо, с учетом структуры изучаемых волн.

Если гравитационные волны существуют как реальный физический процесс, связанный с переносом энергии, то генерирующая их механическая система должна испытывать убыль энергии. Дадим количественную оценку энергии гравитационного излучения. При этом необходимо иметь в виду, что приводимая здесь формула до некоторой степени условна, поскольку она основана на понятии псевдотензора энергии-импульса гравитационного поля, физический смысл которого остается, как указывалось выше, не вполне ясным.

Пусть источником волн гравитации служит изолированная механическая система, все члены которой находятся внутри некоторого конечного объема τ и не выходят за его пределы. Составим интеграл

$$E = \int (F_4^4 + t_4^4) dt, \quad (6,10,5)$$

равный энергии системы, содержащейся в указанном объеме.

Естественно принять, что производная от этого интеграла по времени определяет убыль энергии системы вследствие гравитационного излучения.

Согласно закону сохранения (6,9,10), имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_4^i + t_4^i) = - \frac{\partial}{\partial x} (F_4^1 + t_4^1) - \frac{\partial}{\partial y} (F_4^2 + t_4^2) + \frac{\partial}{\partial z} (F_4^3 + t_4^3),$$

или

$$\frac{\partial}{\partial t} (F_4^i + t_4^i) = - \operatorname{div} \mathbf{A},$$

где через \mathbf{A} обозначен трехмерный вектор с проекциями $F_4^i + t_4^i$, $i = 1, 2, 3$.

Дифференцируя по времени интеграл (6,10,5), имеем

$$\frac{dE}{dt} = - \int_{\tau} \operatorname{div} \mathbf{A} d\tau.$$

Воспользовавшись формулой Остроградского — Гаусса, получим

$$\frac{dE}{dt} = - \int_S \mathbf{A}_n dS, \quad (6,10,6)$$

где интегрирование выполняется по поверхности S , ограничивающей объем τ .

Поскольку тензор энергии-импульса во всех точках граничной поверхности равен нулю, вектор \mathbf{A} в формуле (6,10,6) имеет проекции t_4^1, t_4^2, t_4^3 . Этот вектор играет в нашей теории такую же роль, как вектор Пойтинга в электродинамике, хотя, в отличие от последнего, он не имеет, как уже сказано, ясного физического смысла. В частности, его модуль нельзя конечно отождествить с плотностью потока энергии в соответствующей точке.

Допустим, что излучающая гравитационная волна сосредоточена вблизи начала координат, а поверхность S является сферой, радиус R которой весьма велик по сравнению с размерами системы. Во всех случаях, которые могут представить интерес, поле гравитации является слабым, и потому при вычислении потока (6,10,6) можно пользоваться обычными формулами евклидовой геометрии. Направляющие косинусы внешней нормали к поверхности сферы равны k_1, k_2, k_3 , элемент поверхности определяется произведением $R^2 d\omega$, где $d\omega$ — телесный угол, под которым этот элемент виден из начала координат. Вместо (6,10,6) можно написать

$$\frac{dE}{dt} = - R^2 \int_{4\pi} (k_1 t_4^1 + k_2 t_4^2 + k_3 t_4^3) d\omega. \quad (6,10,7)$$

Применяя это уравнение, необходимо вычислить величины h_k^i , согласно соотношению (6,9,14), найдя предварительно решение уравнений поля для рассматриваемой механической системы.

Достаточную точность обеспечивает решение Эйнштейна (5,10,2), которое в нашем случае можно написать в виде

$$h_k^i - \frac{1}{2} \delta_k^i h = - \frac{4}{R} \iiint T_k^i(x', y', z', t - R) dx' dy' dz'. \quad (6,10,8)$$

Однако и при таком упрощении вычисления остаются довольно громоздкими. С целью их дальнейшего упрощения считают, что на расстоянии R от излучающей системы гравитационные волны являются практически плоскими, а потому при вычислении t_4^i можно пользоваться решением вида (6,10,3). Обыкновенно принимают, что в излучающей системе происходят какие-либо периодические движения (системой является линейный осциллятор, вращающийся стержень, двойная звезда и т. п.). Поэтому периодическими функциями времени оказываются и величины t_4^i . Вследствие малости эффектов гравитационного излучения временные колебания не представляют интереса, поэтому в уравнение (6,10,7) вносят усредненные значения t_4^i .

Для выяснения принципиальной стороны вопроса дальнейшие технические подробности вычислений не имеют большого значения, и потому ввиду их сложности они здесь не приводятся. Вместе с тем мы укажем конечные результаты вычислений в двух простых случаях, которые могут служить характеристикой величины рассматриваемых эффектов.

Однородный прямолинейный стержень вращается с постоянной угловой скоростью ω вокруг перпендикулярной к нему оси, проходящей через центр стержня. Убыль энергии стержня, обусловленная излучением гравитационных волн, равна

$$\frac{dE}{dt} = - \frac{32\gamma}{5c^5} J^2 \omega^6, \quad (6,10,9)$$

где J — момент инерции стержня относительно указанной оси.

Эта формула показывает, что убыль энергии вследствие гравитационного излучения крайне мала. Сравнивая величину (6,10,9) с кинетической энергией стержня $E = \frac{1}{2} J \omega^2$, имеем

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} = - \frac{64\gamma}{5c^5} J \omega^4.$$

Для стержня с массой 1 кг и длиной 2 м при $\omega = 100\pi$ (50 об/сек) получаем

$$\frac{1}{E} \frac{dE}{dt} \simeq - 1,1 \cdot 10^{-42} \text{ сек}^{-1}.$$

В течение года ($3,1 \cdot 10^7$ сек) стержень должен потерять около $3 \cdot 10^{-35}$ своей вращательной энергии.

В качестве второго примера рассмотрим систему двух тел, обращающихся по круговым орбитам вокруг их общего центра тяжести. Потеря энергии такой системы (двойной звездой) определяется формулой

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma}{5c^5} \left(\frac{M_1 M_2}{M_1 + M_2} \right)^2 a^4 \omega^6, \quad (6,10,10)$$

где M_1, M_2 — массы тел, a — расстояние между ними, ω — угловая скорость.

Согласно третьему закону Кеплера,

$$\frac{a^3}{T^2 (M_1 + M_2)} = \frac{\gamma}{4\pi^2},$$

где T — период обращения.

Поэтому угловая скорость определяется соотношением $\omega^2 = \frac{\gamma (M_1 + M_2)}{a^3}$. Следовательно,

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{32\gamma^4}{5c^5} M_1^2 M_2^2 (M_1 + M_2) a^{-5}. \quad (6,10,11)$$

Для примерной количественной оценки допустим, что расстояние между телами равно астрономической единице ($1,5 \cdot 10^{13}$ см), а массы тел одинаковы и равны массе Солнца ($2 \cdot 10^{33}$ г). Потеря энергии составляет $4,5 \cdot 10^{20}$ эрг/сек⁻¹, т. е. около $1,4 \cdot 10^{28}$ эрг в год. Кинетическая энергия системы $\frac{\gamma M_1 M_2}{2a}$ равна приблизительно $8,9 \cdot 10^{45}$ эрг. Поэтому гравитационное излучение, составляющее в год только $1,6 \cdot 10^{-18}$ кинетической энергии системы, в данном случае не может иметь никакого космогонического значения.

В принципе можно ожидать, что для очень тесных двойных звезд энергия гравитационного излучения весьма значительна. Например, если сохранить принятые оценки масс и допустить, что расстояние между звездами в тысячу раз меньше, то убыль энергии будет равна $4,5 \cdot 10^{35}$ эрг/сек⁻¹, т. е. в 120 раз больше светимости Солнца. В этом случае гравитационное излучение составит в год около $1,6 \cdot 10^{-6}$ кинетической энергии системы и может играть существенную роль в ее эволюции.

Для развития проблемы гравитационных волн решающее значение имело бы прямое эмпирическое доказательство их существования. В этом отношении большой интерес представляют попытки создания лабораторных установок, предназначенных для генерации и обнаружения гравитационных волн, в частности для приема гравитационного излучения космических источников. Однако имеющиеся

ся проекты и создававшиеся до сих пор лабораторные приборы не обеспечивают практического осуществления экспериментов, и потому вопрос о существовании гравитационных волн еще не получил определенного решения.

ЛИТЕРАТУРА

1. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 47, 831, 1915. Русск. пер.: собр. научн. трудов, 1, 439. «Наука», М., 1965.
2. А. Богородский. Циркуляр ГАО АН СССР, № 30, 1940; Уравнения поля Эйнштейна и их применение в астрономии, гл. III. Изд-во КГУ, К., 1962.
3. Y. Lense, H. Thirring.— Phys. Zeitschr., 19, 156, 1918.
4. А. Богородский.— Астрон. журн., 36, 883, 1959.
5. В. А. Фок. Теория пространства, времени и тяготения. Гостехиздат, М., 1955.
6. А. Богородский.— Известия Ест.- научн. института Лесгафта, 23, 21, 1940.
7. A. Einstein.— Annal. Phys., 49, 769, 1916, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 1, 452. «Наука», М., 1965.
8. R. C. Tolman. Relativity, Thermodynamics and Cosmology, 288, Oxford, 1934.
9. А. Богородский.— Публикации Киев. астроном. обсерватории, 8, 1959.
10. В. А. Фок.— Журн. эксперимент. теоретич. физики, 9, 411, 1939.
11. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 688, 1916, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 1, 514. «Наука», М., 1965.
12. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1, 154, 1918, Русск. пер.: Собр. научн. трудов, 1, 631, «Наука», М., 1965.
13. J. Weber. General Relativity and Gravitational Waves. New York, 1961. Русск. пер.: Д. Вебер. Общая теория относительности и гравитационные волны. ИЛ, М., 1962.