Глава VII. СТРОЕНИЕ ЗВЕЗД

1. Фигуры равновесия тяжелой жидкости. Наряду с небесной механикой обширной и важной областью применения теории гравитации является учение о фигурах равновесия жидких масс. В гидростатике известны три фигуры равновесия жидкой массы, частицы которой взаимодействуют по закону тяготения Ньютона: сферическая конфигурация, бесконечный цилиндр и бесконечный плоский слой.

Для сферической конфигурации условие равновесия имеет вид

$$\frac{dp}{dr} + \rho \frac{d\varphi}{dr} = 0, \tag{7,1,1}$$

где p, ρ, φ — соответственно давление, плотность и гравитационный потенциал, которые являются функциями расстояния r от центра.

Внешний радиус конфигурации обозначим через r_1. Пусть $M(r)$ — масса среды, расположенной внутри сферы радиуса $r \leqslant r_1$. В теории притяжения выводится формула (1,5,4) для потенциала поля во внутренней точке

$$\varphi = \frac{\gamma M(r)}{r} + 4\pi \int_r^{r_1} r\rho dr.$$

Дифференцируя это равенство и принимая во внимание очевидное соотношение $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$, находим $\frac{d\varphi}{dr} = -\frac{\gamma M(r)}{r^2}$. Поэтому вместо (7,1,1) можно написать

$$\frac{dp}{dr} + \frac{\gamma M(r)\rho}{r^2} = 0. \tag{7,1,2}$$

Это основное уравнение равновесия, связывающее давление и плотность в сферической конфигурации. Функция $M(r)$ зависит от распределения плотности и легко исключается. Если уравнение (7,1,2) умножить на $\frac{r^2}{\rho}$, то после дифференцирования оно примет вид

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{r^2}{\rho}\frac{dp}{dr}\right) + 4\pi\gamma r^2 \rho = 0. \tag{7,1,3}$$

Для несжимаемой среды условие равновесия определяет ход гидростатического давления с расстоянием от центра. Решение уравнения (7,1,3) в этом случае таково: $p = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho^2 (r_1^2 - r^2)$. Если же среда сжимаема, то задача содержит две неизвестные функции. Чтобы сделать задачу определенной, необходимо к условию равновесия присоединить независимое уравнение состояния, связывающее давление с плотностью.

Бесконечный прямой цилиндр представляет собой конфигурацию, симметричную относительно оси. Все величины, характеризующие состояние среды, являются функциями расстояния r от оси цилиндра. Из условия симметрии следует, что в каждой точке напряженность поля гравитации направлена к оси цилиндра и образует с нею прямой угол. Найдем величину этой напряженности.

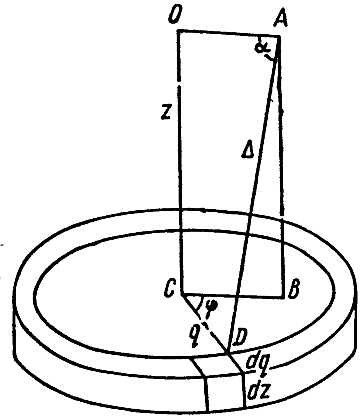

Рис. 26.

На рис. 26 точка O — основание перпендикуляра r, опущенного на ось цилиндра из внутренней точки A. На расстоянии z от нее построим кольцо, плоскость которого перпендикулярна к оси цилиндра. Внутренний радиус кольца — q, ширина его — dq, толщина — dz. Элемент кольца, отвечающий приращению $d\varphi$ азимута φ, имеет массу $dm = \rho q d\varphi dq dz$. В точке A напряженность поля, создаваемого этим элементом, равна $\frac{\gamma dm}{\Delta^2}$, а ее проекция на направление AO составляет $\frac{\gamma dm \cos\alpha}{\Delta^2}$. Из треугольников ABD и BCD находим

$$\Delta^2 = z^2 + q^2 + r^2 - 2qr\cos\varphi.$$

Треугольники ADO и CDO вместе с предыдущим равенством дают $\cos\alpha = \frac{(r - q\cos\varphi)}{\Delta}$. Поэтому указанная проекция равна $\frac{\gamma(r - q\cos\varphi)\,dm}{\Delta^3}$. Внося сюда значения dm, Δ и выполняя интегрирование, получим выражение для напряженности, направленной вдоль линии AO:

$$F_r = 2\gamma \int_0^{2\pi}\int_0^{\infty}\int_0^{r_1} \frac{(r - q\cos\varphi)\,\rho q\, d\varphi\, dz\, dq}{(z^2 + q^2 + r^2 - 2qr\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}}. \qquad (7,1,4)$$

Множитель 2 введен для учета притяжения со стороны части цилиндра, расположенной по другую сторону от точки O.

Проинтегрируем по переменной z; имеем

$$\int_0^\infty \frac{dz}{(z^2+q^2+r^2-2qr\cos\varphi)^{\frac{3}{2}}} = \frac{1}{q^2+r^2-2qr\cos\varphi}.$$

Выполним теперь интегрирование по азимуту. Воспользовавшись преобразованием

$$2r-2q\cos\varphi = \frac{1}{r}(q^2+r^2-2qr\cos\varphi)+\frac{1}{r}(r^2-q^2),$$

находим

$$\int_0^{2\pi} \frac{2(r-q\cos\varphi)\,d\varphi}{q^2+r^2-2qr\cos\varphi} = \frac{2\pi}{r}+\frac{r^2-q^2}{r}\int_0^{2\pi}\frac{d\varphi}{q^2+r^2-2qr\cos\varphi}.$$

Интеграл, содержащийся в правой части этого равенства, равен $\pm\frac{2\pi}{r^2-q^2}$ в зависимости от условий $r \gtrless q$ соответственно.

Таким образом,

$$\int_0^{2\pi} \frac{2(r-q\cos\varphi)\,d\varphi}{q^2+r^2-2qr\cos\varphi} = \begin{matrix} \frac{4\pi}{r}, & r>q; \\ 0, & r<q. \end{matrix}$$

Область интегрирования по переменной q разделим на два интервала: $0, r$ и r, r_1. Соотношение (7,1,4) принимает при этом вид

$$F_r = \frac{4\pi\gamma}{r}\int_0^r q\rho\,dq.$$

Рассмотрим отрезок цилиндра радиуса r, ограниченный поперечными сечениями, расположенными на расстоянии единицы длины друг от друга. Масса этого отрезка равна $m(r) = 2\pi\int_0^r q\rho\,dq$. Поэтому выражение для искомой напряженности можно написать так:

$$F_r = \frac{2\gamma m(r)}{r}.$$

Внутри бесконечного прямого цилиндра напряженность поля тяготения на расстоянии r от оси определяется массой погонной единицы цилиндра с сечением радиуса r. В точках, расположенных на расстояниях r и $r+dr$ от оси цилиндра, разность давлений составляет $dp = -F_r\,\rho dr$; следовательно,

$$\frac{dp}{dr}+\frac{2\gamma m(r)\,\rho}{r} = 0. \qquad (7,1,5)$$

Как и в предыдущем случае, условие равновесия связывает гидростатическое давление с распределением плотности, от которого зависит функция $m(r)$. В частном случае, когда среда несжимаема, распределение давления в цилиндре отвечает, как легко убедиться, закону $p = \pi\gamma\rho^2 (r_1^2 - r^2)$.

Третьей фигурой равновесия гравитирующей непрерывной среды является бесконечный слой, в котором распределение плотности, гидростатического давления и других характеристик симметрично относительно средней плоскости. Если начало координат поместить в плоскость симметрии и ось z направить по нормали к этой плоскости, то характеристики среды будут функциями одной координаты z. Напряженность поля направлена по перпендикуляру, опущенному из данной точки на плоскость симметрии. Найдем величину напряженности.

Две плоскости, перпендикулярные оси z и расположенные на расстоянии dz одна от другой, вырезают бесконечно тонкий однородный слой, на единицу площади которого приходится масса ρdz, где ρ — объемная плотность среды. Согласно известному результату теории притяжения, величина напряженности, обусловленная этим слоем, не зависит от расстояния данной точки от слоя и равна $2\pi\gamma\rho\, dz$. В точке с координатой z полная напряженность поля определяется массой среды, расположенной по обе стороны от плоскости симметрии до расстояний $|z|$, поскольку действия областей, расположенных на бо́льших расстояниях от плоскости симметрии, взаимно компенсируются. Интегрируя в пределах $\mp z$, находим $2\pi\gamma \int\limits_{-z}^{+z} \rho dz = 4\pi\gamma \int\limits_0^z \rho dz$. Проекция напряженности на ось z равна $-4\pi\gamma \int\limits_0^z \rho dz$.

Величина $\int\limits_0^z \rho dz$ представляет собой массу $m(z)$ среды в объеме прямого цилиндра с единичным поперечным сечением, поставленного основанием на плоскость симметрии. Разность давлений в точках z и $z + dz$ равна $dp = -4\pi\gamma m(z) \rho dz$. Поэтому условие равновесия конфигурации таково:

$$\frac{dp}{dz} + 4\pi\gamma m(z) \rho = 0. \tag{7,1,6}$$

В частном случае, когда среда несжимаема, распределение гидростатического давления определяется соотношением $p = 2\pi\gamma\rho^2 (h^2 - z^2)$, где h — расстояние от средней плоскости до границы конфигурации.

В астрономии интерес представляет первая из упомянутых фигур равновесия, поскольку наиболее распространенные небесные тела — звезды являются сферическими конфигурациями, находящимися в равновесии в собственных гравитационных полях. Условие механического равновесия в форме (7,1,2) или (7,1,3) является одним из основных уравнений строения звезды, хотя применение его для точных расчетов требует знания ряда физических особенностей звезды. Взятое в отдельности, это уравнение позволяет составить только очень грубое представление о некоторых условиях в глубоких недрах звезды.

В уравнении (7,1,2) заменим в правой части переменную плотность ее средним значением $\rho_m = \frac{3M}{4\pi r_1^3}$, где M и r_1 — масса и радиус звезды. Считая, что веществом является идеальный газ, воспользуемся формулой Клапейрона $p = \frac{R}{\mu} \rho_m T$, где R — газовая постоянная, μ — молекулярный вес вещества. Проинтегрировав уравнения равновесия, получим распределение температуры

$$T = \frac{\gamma\mu M}{2r_1 R}\left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right). \tag{7,1,7}$$

Соответствующее распределение давления находится по формуле Клапейрона, которая в данном приближении дает

$$p = \frac{3\gamma M^2}{8\pi r_1^4}\left(1 - \frac{r^2}{r_1^2}\right). \tag{7,1,8}$$

Условия в центре конфигурации характеризуются температурой и давлением

$$T_c = \frac{\gamma\mu M}{2r_1 R}; \quad p_c = \frac{3\gamma M^2}{8\pi r_1^4}. \tag{7,1,9}$$

Для Солнца при $\mu = 1$ эти соотношения дают $T_c \simeq 10^7$ *град*, $p_c \simeq 10^9$ *атм*.

Воспользуемся условием равновесия (7,1,2) для вывода соотношения между гравитационной энергией газового шара и его тепловой энергией.

Энергия гравитационного взаимодействия массы $M(r)$ и сферического слоя с массой $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$ равна $-\frac{\gamma M(r)\, dM(r)}{r}$. Поэтому гравитационная энергия конфигурации определяется формулой

$$U = -4\pi\gamma \int_0^{r_1} r\rho M(r)\, dr. \tag{7,1,10}$$

Теплота, отнесенная к единице массы идеального газа, равна $\frac{c_v T}{\mu}$, где c_v — отнесенная к молю теплоемкость при постоянном объеме. Согласно известному соотношению термодинамики, $c_v = \frac{R}{k-1}$, где k — отношение теплоемкостей, которое служит показателем степени в законе адиабаты.

Тепловая энергия сферического слоя с массой $dM\,(r)$

$$\frac{c_v}{\mu}\, T dM(r) = \frac{4\pi}{k-1}\,\frac{R}{\mu}\,\rho T r^2 dr = \frac{4\pi}{k-1}\, r^2 p dr.$$

Следовательно, вся конфигурация обладает тепловым запасом

$$Q = \frac{4\pi}{k-1}\int\limits_0^{r_1} r^2 p dr. \qquad (7,1,11)$$

Связь между величинами U и Q определяется условием равновесия.

Внесем в (7,1,10) значение $M\,(r)$ из уравнения равновесия (7,1,2). Полученное таким образом равенство

$$U = 4\pi \int\limits_0^{r_1} r^3\, \frac{dp}{dr}\, dr$$

проинтегрируем по частям:

$$U = 4\pi \left\{ pr^3 \Big|_0^{r_1} - 3\int\limits_0^{r_1} r^2 p dr \right\} = -\,12\pi \int\limits_0^{r_1} r^2 p dr.$$

Сравнивая это соотношение с (7,1,11), находим

$$U + 3(k-1)Q = 0. \qquad (7,1,12)$$

Это уравнение служит частным выражением теоремы вириала для стационарной системы.

Если газ одноатомный $\left(k = \frac{5}{3}\right)$, то теорема вириала принимает вид $U + 2Q = 0$ и показывает, что в случае равновесия запас теплоты газового шара составляет половину абсолютной величины его гравитационной энергии. Основываясь на этой теореме, нетрудно показать, что при гравитационном сжатии убыль полной энергии газового шара равна половине освобождающейся гравитационной энергии. Вторая половина освобождающейся энергии увеличивает запас теплоты шара, вызывая соответствующее нагревание его.

Теорема вириала позволяет получить оценку средней температуры звезды.

Согласно (7,1,11), можно написать

$$Q \simeq \frac{6\pi}{\mu}\, \rho_m R \int\limits_0^{r_1} r^2 T dr.$$

Если в правой части равенства заменить переменную температуру ее средним значением T_m, то получится

$$Q = \frac{3RM}{2\mu} T_m.$$

Гравитационную энергию шара вычислим по формуле (7,1,10), положив $\rho = \rho_m$.

$$U = -\frac{3}{5}\frac{\gamma M^2}{r_1}.$$

Внося эти значения в равенство $U + 2Q = 0$, найдем $T_m = \frac{2\gamma\mu M}{5r_1 R}$, что практически не отличается от первой формулы (7,1,9).

2. Политропные газовые шары. Как уже сказано, условие равновесия сферической конфигурации должно быть дополнено уравнением состояния в виде независимого соотношения между гидродинамическим давлением и плотностью среды. Таким независимым соотношением во многих случаях может служить закон политропы $p = C\rho^k$, охватывающий широкий класс термодинамических процессов в газах.

Политропный процесс в идеальном газе отвечает соотношениям

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T; \quad p = C\rho^k; \quad v = \frac{\mu}{\rho},$$

где μ — молекулярный вес, v — объем одного моля, R — газовая постоянная, равная разности удельных теплоемкостей $c_p - c_v$.

Непосредственное вычисление дает $pdv = -\frac{c_p - c_v}{k-1} dT$. Поэтому математическое выражение первого начала термодинамики $dQ = c_v dT + pdv$ приводится к виду $dQ = \frac{kc_v - c_p}{k-1} dT$ и показывает, что политропный процесс в идеальном газе протекает при постоянной теплоемкости. Обозначив ее через c, получим $k = \frac{c - c_p}{c - c_v}$. В частном случае, когда состояние газа изменяется при $dQ = 0$, т. е. без теплового обмена с окружающей средой, показатель степени равен отношению удельных теплоемкостей: политропа совпадает с адиабатой.

Теория строения политропных шаров развита в 1907 г. Эмденом [1]. Математический аппарат ее сохраняет некоторое значение и в современной теории внутреннего строения звезд.

Напишем закон политропы в виде $p = C\rho^{\frac{1}{n}+1}$, где n — постоянный параметр, называемый индексом политропы. Исключив гидродинамическое давление, приведем уравнение равновесия (7,1,3)