Если в правой части равенства заменить переменную температуру ее средним значением T_m, то получится

$$Q = \frac{3RM}{2\mu} T_m.$$

Гравитационную энергию шара вычислим по формуле (7,1,10), положив $\rho = \rho_m$.

$$U = -\frac{3}{5}\frac{\gamma M^2}{r_1}.$$

Внося эти значения в равенство $U + 2Q = 0$, найдем $T_m = \frac{2\gamma\mu M}{5r_1 R}$, что практически не отличается от первой формулы (7,1,9).

2. Политропные газовые шары. Как уже сказано, условие равновесия сферической конфигурации должно быть дополнено уравнением состояния в виде независимого соотношения между гидродинамическим давлением и плотностью среды. Таким независимым соотношением во многих случаях может служить закон политропы $p = C\rho^k$, охватывающий широкий класс термодинамических процессов в газах.

Политропный процесс в идеальном газе отвечает соотношениям

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T; \quad p = C\rho^k; \quad v = \frac{\mu}{\rho},$$

где μ — молекулярный вес, v — объем одного моля, R — газовая постоянная, равная разности удельных теплоемкостей $c_p - c_v$.

Непосредственное вычисление дает $pdv = -\frac{c_p - c_v}{k-1} dT$. Поэтому математическое выражение первого начала термодинамики $dQ = c_v dT + pdv$ приводится к виду $dQ = \frac{kc_v - c_p}{k-1} dT$ и показывает, что политропный процесс в идеальном газе протекает при постоянной теплоемкости. Обозначив ее через c, получим $k = \frac{c - c_p}{c - c_v}$. В частном случае, когда состояние газа изменяется при $dQ = 0$, т. е. без теплового обмена с окружающей средой, показатель степени равен отношению удельных теплоемкостей: политропа совпадает с адиабатой.

Теория строения политропных шаров развита в 1907 г. Эмденом [1]. Математический аппарат ее сохраняет некоторое значение и в современной теории внутреннего строения звезд.

Напишем закон политропы в виде $p = C\rho^{\frac{1}{n}+1}$, где n — постоянный параметр, называемый индексом политропы. Исключив гидродинамическое давление, приведем уравнение равновесия (7,1,3) к следующему виду:

$$\frac{d^2\rho^{\frac{1}{n}}}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{d\rho^{\frac{1}{n}}}{dr}+\frac{4\pi\gamma}{C(n+1)}\rho=0,$$

или, если положить $\rho=u^n$ и ввести обозначение $\alpha^2=\dfrac{4\pi\gamma}{C(n+1)}$,

$$\frac{d^2u}{dr^2}+\frac{2}{r}\frac{du}{dr}+\alpha^2u^n=0\cdot \tag{7,2,1}$$

Это основное уравнение строения равновесного политропного шара, называемое уравнением Эмдена. При его интегрировании принимается, что в центре конфигурации функция u имеет максимум: при $r=0$; $u=u_0$; $\dfrac{du}{dr}=0$. Внешняя граница конфигурации отвечает условию $u=0$.

В элементарных функциях уравнение Эмдена интегрируется при трех значениях индекса $n=0, 1, 5$. В первом случае решением, удовлетворяющим указанным условиям в центре, является функция $u=u_0-\dfrac{1}{6}\alpha^2r^2$. При $n=1$ решение таково: $u=\dfrac{u_0\sin\alpha r}{\alpha r}$.

Если же $n=5$, то решением служит функция $u=u_0\left(1+\dfrac{1}{3}\alpha^2u_0^4r^2\right)^{-\frac{1}{2}}$. В последнем случае величина u принимает нулевое значение только при $r\to\infty$, показывая, что шар имеет бесконечно большие размеры, хотя масса его остается конечной. В случае $n>5$ не только размеры, но и массы политропных шаров оказываются бесконечно большими. Нетрудно убедиться в том, что значения $n<0$ также не представляют интереса. Действительно, комбинируя закон политропы и уравнение Клапейрона, получим равенство $RT=\mu C\rho^{\frac{1}{n}}$, показывающее, что при отрицательном индексе политропы с возрастанием плотности температура вещества падает. Основной интерес представляет, таким образом, случай $0<n<5$.

Уравнение Эмдена для различных n, отличных от трех упомянутых значений, решается численным интегрированием.

Предварительно уравнение (7,2,1) с помощью преобразований

$$u=u_0y;\quad \alpha u_0^{\frac{n-1}{2}}r=x \tag{7,2,2}$$

приводится к виду

$$\frac{d^2y}{dx^2}+\frac{2}{x}\frac{dy}{dx}+y^n=0. \tag{7,2,3}$$

Условия в центре переходят при этом в следующие: $x=0$, $y=1$, $\dfrac{dy}{dx}=0$, а внешняя граница конфигурации отвечает значениям $x=x_1$, $y=0$.

В книге Эмдена имеются таблицы и графики, содержащие результаты численного интегрирования (7,2,3) для двенадцати значений политропного индекса. Приводим таблицы для $n = 1{,}5$ и $3{,}0$ (табл. 2).

Таблица 2

$n = 1{,}5$			$n = 3{,}0$		
x	y	$-y'$	x	y	$-y'$
0	1	0	0	1	0
0,25	0,98966	0,08268	0,25	0,98975	0,08204
0,50	0,95911	0,16057	0,50	0,95987	0,15495
0,75	0,91008	0,22988	0,75	0,91355	0,21270
1,00	0,84516	0,28727	1,00	0,85505	0,25219
1,25	0,76761	0,33061	1,25	0,78897	0,27370
1,50	0,68132	0,35752	1,50	0,71948	0,27993
1,75	0,58994	0,37168	1,75	0,64996	0,27460
2,00	0,49670	0,37209	2,00	0,58282	0,26149
2,25	0,40477	0,36119	2,1620	0,54133	0,25052
2,50	0,31678	0,34120	2,50	0,46109	0,22396
2,75	0,23468	0,31475	3,00	0,35921	0,18393
2,8085	0,21617	0,30788	3,50	0,27629	0,14859
3,00	0,15972	0,28442	4,00	0,20942	0,11998
3,25	0,09258	0,25261	4,50	0,15529	0,09748
3,50	0,03335	0,22147	5,00	0,11110	0,08003
3,625	0,00659	0,20680	6,00	0,04411	0,05599
3,64	0,00350	0,20511	6,80	0,00471	0,04360
3,6571	0	0,20316	6,9011	0	0,04231

Покажем, каким образом, пользуясь решением уравнения Эмдена для данного индекса, можно найти распределение плотности, давления и температуры в газовом шаре.

Преобразуем левую часть уравнений равновесия

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma M(r)}{r^2}$$

с помощью закона политропы и введем переменные, согласно (7,2,2). Полученное таким образом равенство

$$\frac{4\pi}{\alpha} u_0^{\frac{n+1}{2}} \frac{dy}{dx} = -\frac{M(r)}{r^2},$$

а также второе из соотношений (7,2,2) приложим к внешней границе конфигурации. Система уравнений

$$\frac{4\pi}{\alpha} u_0^{\frac{n+1}{2}} \left(\frac{dy}{dx}\right)_1 = -\frac{M}{r_1^2}; \quad \alpha u_0^{\frac{n-1}{2}} r_1 = x_1 \tag{7,2,4}$$

позволяет вычислить постоянные α и u_0, если при известном индексе политропы задать массу и радиус шара.

Нетрудно найти теперь распределение плотности и давления.

Для выбранного r вычисляется переменная x по первой из формул (7,2,2), затем находится соответствующее табличное значение y, что дает возможность вычислить плотность $\rho = (u_0 y)^n$. Давление легко получить с помощью закона политропы, определив входящую в этот закон постоянную $C = \frac{4\pi\gamma}{\alpha^2 (n+1)}$. Для вычисления хода температуры следует воспользоваться уравнением Клапейрона, найдя предварительно молекулярный вес в зависимости от принятого химического состава.

Итак, полное решение задачи о внутреннем строении политропного шара определенного индекса требует задания радиуса и массы конфигурации и молекулярного веса ее вещества.

Составим общие формулы, характеризующие условия в центре политропного шара.

Найдя постоянные α, u_0 из уравнений (7,2,4), нетрудно убедиться в том, что при $r = 0$ плотность, давление и температура определяются соотношениями

$$\rho_c = -\frac{Mx_1}{4\pi r_1^3 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1}; \qquad p_c = \frac{\gamma M^2}{4\pi (n+1) r_1^4 \left(\frac{dy}{dx}\right)_1^2};$$

$$T_c = -\frac{\gamma\mu M}{(n+1)\left(x\frac{dy}{dx}\right)_1 r_1 R}. \tag{7,2,5}$$

В качестве иллюстрации приведем рассмотренный Эмденом пример адиабатического шара, имеющего массу и радиус Солнца и состоящего из нейтрального водорода ($n = 1{,}5$, $\mu = 1{,}0$). Формулы (7,2,5) и данные последней строки табл. 2 при $n = 1{,}5$ дают

$$\rho_c = 8{,}3\ г \cdot см^{-3}; \quad p_c = 8{,}2 \cdot 10^9\ атм; \quad T_c = 1{,}2 \cdot 10^7\ град.$$

В предыдущем параграфе мы составили выражение для потенциальной энергии газового шара, обусловленной гравитационным взаимодействием между его элементами. Величина этой энергии зависит от распределения плотности в шаре. Однако в случае политропного шара для вычисления гравитационной энергии нет необходимости знать распределение плотности в явном виде.

С помощью очевидного соотношения $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$ перепишем формулу (7,1,10) так:

$$U = -\gamma \int_0^{r_1} \frac{M(r)}{r} \frac{dM(r)}{dr} dr.$$

Выполнив интегрирование по частям, получим

$$U = -\frac{\gamma M^2}{2r_1} - \frac{\gamma}{2} \int_0^{r_1} \frac{M^2(r)}{r^2} dr.$$

При этом принято во внимание, что в случае $r \to 0$ величина $M(r)$ стремится к нулю, как r^3.

Из условия равновесия следует

$$\frac{\gamma M^2(r)}{r^2} = -\frac{M(r)}{\rho}\frac{dp}{dr}.$$

Поэтому

$$U = -\frac{\gamma M^2}{2r_1} + \frac{1}{2}\int_0^{r_1}\frac{M(r)}{\rho}\frac{dp}{dr}\,dr. \qquad (7,2,6)$$

Эта формула является вполне общей и выполняется при любом распределении плотности в равновесной сферической конфигурации. Приложим ее к политропе. Подстановка $p = C\rho^{\frac{1}{n}+1}$ дает

$$\int_0^{r_1}\frac{M(r)}{\rho}\frac{dp}{dr}\,dr = \frac{n+1}{n}C\int_0^{r_1}M(r)\rho^{\frac{1}{n}-1}\frac{d\rho}{dr}\,dr.$$

После интегрирования по частям получим

$$(n+1)C\left\{M(r)\rho^{\frac{1}{n}}\Big|_0^{r_1} - \int_0^{r_1}\frac{dM(r)}{dr}\rho^{\frac{1}{n}}dr\right\} = -4\pi(n+1)\int_0^{r_1}r^2p\,dr.$$

При этом мы вновь воспользовались соотношением $dM(r) = 4\pi r^2\rho dr$ и приняли во внимание условие $\rho = 0$ на внешней границе конфигурации.

Вместо (7,2,6), можно написать

$$U = -\frac{\gamma M^2}{2r_1} - 2\pi(n+1)\int_0^{r_1}r^2p\,dr. \qquad (7,2,7)$$

При доказательстве теоремы вириала мы представили гравитационную энергию шара в виде $U = -12\pi\int_0^{r_1}r^2p\,dr$. Внеся это соотношение в (7,2,7), получим

$$U = -\frac{3}{5-n}\frac{\gamma M^2}{r_1}. \qquad (7,2,8)$$

Гравитационная энергия политропного газового шара определяется его массой, радиусом и индексом политропы.

Если при гравитационном сжатии радиус политропного шара изменится от r_0 до r_1, то убыль его гравитационной энергии

$$U_0 - U = \frac{3\gamma M^2}{5-n}\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_0}\right).$$

При $r_0 > r_1$ вторым членом в правой части равенства можно пренебречь. Поэтому абсолютное значение величины (7,2,8) с достаточной точностью представляет собой гравитационную энергию, освободившуюся к данному моменту при эволюционном сжатии газового шара. Для шара, находящегося в адиабатическом равновесии ($n = 1,5$) и имеющего массу и радиус Солнца, эта величина составляет около $3 \cdot 10^{48}$ *эрг*.

Как известно, одной из первых гипотез о природе источников звездной энергии была контракционная гипотеза Гельмгольца — Кельвина, согласно которой излучение звезд поддерживается их гравитационным сжатием. Формула (7,2,8) показывает, что для количественного объяснения наблюдаемых светимостей пришлось бы допустить чрезмерно быстрое гравитационное сжатие. Действительно, с точки зрения контракционной гипотезы, светимость звезды должна определяться соотношением $L = -\frac{1}{2}\frac{dU}{dt}$. Коэффициент пропорциональности введен здесь согласно требованию теоремы вириала. По формуле (7,2,8) имеем

$$L = \frac{3}{2(5-n)}\frac{\gamma M^2}{r_1}\left|\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dt}\right|. \qquad (7,2,9)$$

Приложим эту формулу к современному состоянию Солнца, принимая для определенности адиабатическое распределение плотности ($n = 1,5$).

Светимость Солнца измеряется величиной $1,2 \cdot 10^{41}$ *эрг* в год. Внося это значение в формулу (7,2,9), получим $\left|\frac{1}{r_1}\frac{dr_1}{dt}\right| \simeq 0,8 \cdot 10^{-7}$. Соответствующее уменьшение радиуса составляет около 50 *м* в год. При столь быстром сжатии радиус Солнца за 7 млн. лет должен сократиться вдвое, а эволюция Солнца в прошлом могла бы продолжаться не более 10—12 млн. лет, что в сотни или даже в тысячи раз меньше принятых в настоящее время оценок нижней границы его возраста. По современным представлениям, излучение звезд в продолжении большей части их существования поддерживается термоядерными реакциями, тогда как гравитационное сжатие служит основным источником энергии лишь в течение сравнительно кратковременных стадий звездной эволюции.

3. Условия внутри звезд. Теория Эмдена позволяет вычислить распределение плотности и температуры в газовом шаре, находящемся в гравитационном равновесии. Однако выводы ее применяются очень ограниченно, поскольку она не учитывает физических условий, присущих реальным звездам.

Для развития современных представлений о физических процессах в звездах большое значение имели исследования Эддингтона, результаты которых изложены в его известной книге [2], а также фундаментальная монография Чандрасекара [3].