

При $r_0 > r_1$ вторым членом в правой части равенства можно пренебречь. Поэтому абсолютное значение величины (7,2,8) с достаточной точностью представляет собой гравитационную энергию, освободившуюся к данному моменту при эволюционном сжатии газового шара. Для шара, находящегося в адиабатическом равновесии ($n = 1,5$) и имеющего массу и радиус Солнца, эта величина составляет около $3 \cdot 10^{48}$ эрг.

Как известно, одной из первых гипотез о природе источников звездной энергии была контракционная гипотеза Гельмгольца — Кельвина, согласно которой излучение звезд поддерживается их гравитационным сжатием. Формула (7,2,8) показывает, что для количественного объяснения наблюдаемых светимостей пришлось бы допустить чрезмерно быстрое гравитационное сжатие. Действительно, с точки зрения контракционной гипотезы, светимость звезды должна определяться соотношением $L = -\frac{1}{2} \frac{dU}{dt}$. Коэффициент пропорциональности введен здесь согласно требованию теоремы вириала. По формуле (7,2,8) имеем

$$L = \frac{3}{2(5-n)} \frac{\gamma M^2}{r_1} \left| \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dt} \right|. \quad (7,2,9)$$

Приложим эту формулу к современному состоянию Солнца, принимая для определенности адиабатическое распределение плотности ($n = 1,5$).

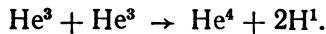
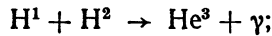
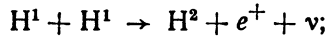
Светимость Солнца измеряется величиной $1,2 \cdot 10^{41}$ эрг в год. Внося это значение в формулу (7,2,9), получим $\left| \frac{1}{r_1} \frac{dr_1}{dt} \right| \simeq 0,8 \cdot 10^{-7}$. Соответствующее уменьшение радиуса составляет около 50 м в год. При столь быстром сжатии радиус Солнца за 7 млн. лет должен сократиться вдвое, а эволюция Солнца в прошлом могла бы продолжаться не более 10—12 млн. лет, что в сотни или даже в тысячи раз меньше принятых в настоящее время оценок нижней границы его возраста. По современным представлениям, излучение звезд в продолжении большей части их существования поддерживается термоядерными реакциями, тогда как гравитационное сжатие служит основным источником энергии лишь в течение сравнительно кратковременных стадий звездной эволюции.

3. Условия внутри звезд. Теория Эмдена позволяет вычислить распределение плотности и температуры в газовом шаре, находящемся в гравитационном равновесии. Однако выводы ее применяются очень ограниченно, поскольку она не учитывает физических условий, присущих реальным звездам.

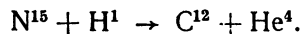
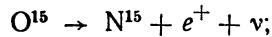
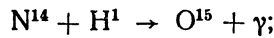
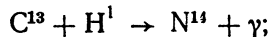
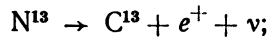
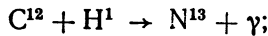
Для развития современных представлений о физических процессах в звездах большое значение имели исследования Эддингтона, результаты которых изложены в его известной книге [2], а также фундаментальная монография Чандрасекара [3].

Важнейшей особенностью звезды является наличие внутренних источников энергии, которые поддерживают ее излучение. Согласно общепринятому представлению, для большинства известных в настоящее время звезд источником энергии служат термоядерные реакции, сопровождающиеся превращением водорода в гелий. Подробное их изучение показало, что основную роль в звездах играют протон-протонные реакции и углеродный цикл [4].

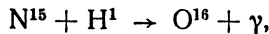
При взаимодействии двух протонов образуются дейтрон, позитрон и нейтрино. Позитрон, соединяясь с электроном, исчезает, превращаясь в два кванта радиации, а нейтрино свободно выходит наружу и покидает звезду, унося некоторую часть энергии. Образовавшийся дейтрон соединяется с новым протоном, образуя ядро He^3 и излучая γ -квант. При взаимодействии двух ядер He^3 возникает устойчивое ядро гелия He^4 и два протона. Вся группа реакций имеет следующий вид:



Углеродистый цикл состоит из шести реакций:

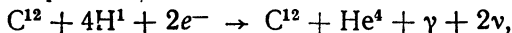


Наряду с последней из них, восстанавливающей ядро C^{12} , происходит также реакция



приводящая к образованию кислорода. Однако вероятность ее оказывается ничтожно малой, вследствие чего ее можно не принимать во внимание.

Позитроны, возникающие во второй и пятой реакциях цикла, соединяются затем с электронами и вместе с последними превращаются в излучение. Нейтрино покидают звезду. Весь цикл можно схематически выразить равенством



которое показывает, что конечным результатом цикла является образование α -частицы, тогда как углерод полностью восстанавливается.

Выделение энергии, сопровождающее превращение водорода в гелий, обусловлено тем, что суммарная масса четырех протонов превосходит массу образующегося ядра гелия. В обычных единицах атомный вес водорода равен 1,008, что для четырех протонов дает суммарное значение 4,032, тогда как атомный вес гелия достигает только 4,003. Дефект массы, равный 0,029, в абсолютных единицах составляет $\Delta M = 4,8 \cdot 10^{-26}$ г. Согласно известному соотношению Эйнштейна $\Delta E = c^2 \Delta M$, образование ядра гелия из четырех протонов сопровождается выделением энергии $\Delta E = 4,3 \cdot 10^{-5}$ эрг.

Для каждого из указанных типов термоядерных реакций эта величина должна быть несколько уменьшена, поскольку часть энергии уносится нейтрино.

В теории внутреннего строения звезд источники энергии принято характеризовать удельной светимостью ϵ , т. е. мощностью, отнесенной к единице массы звездного вещества. Для вычисления этой величины необходимо знать скорость превращения водорода в гелий, которая определяется эффективными сечениями соответствующих реакций.

Приводим применяемые для количественных расчетов формулы:
а) протон-протонные реакции

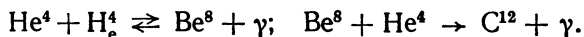
$$\epsilon_{pp} = 2,5 \cdot 10^6 \rho x_H^2 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{3/2} e^{-33,8 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/2}}; \quad (7,3,1)$$

б) углеродный цикл

$$\epsilon_{cc} = 9,5 \cdot 10^{28} \rho x_H x_{CN} \left(\frac{10^6}{T}\right)^{3/2} e^{-152,3 \left(\frac{10^6}{T}\right)^{1/2}}. \quad (7,3,2)$$

Через x_H обозначено относительное содержание водорода в веществе звезды; x_{CN} — суммарное содержание углерода и азота.

Протон-протонные реакции играют роль основного источника звездной энергии при температурах порядка 10 млн. град. При температурах около 20 млн. град. главное значение приобретает углеродный цикл. В промежуточных случаях, когда температура в центральной части звезды составляет 12—16 млн. град, совместно происходят оба типа термоядерных реакций, так как величины (7,3,1) и (7,3,2) оказываются сравнимыми. В очень горячих звездах с центральными температурами около 100 млн. град гелий может превращаться в углерод при тройных столкновениях α -частиц. Этот процесс можно представить в виде двух следующих реакций:



Возникающее в первой реакции ядро Be^8 крайне неустойчиво и потому оно почти мгновенно распадается на две α -частицы. В стационарном состоянии, отвечающем равновесию между He^4 и Be^8 ,

в среднем на 10^{10} α -частиц приходится одно ядро Be^8 . Вступая во взаимодействие с новой частицей He^4 , оно образует C^{12} . Ввиду крайней малой продолжительности жизни Be^8 обе реакции могут осуществиться только при тройных столкновениях ядер гелия. Сопровождающий этот процесс выход энергии определяется формулой

$$\epsilon = 2 \cdot 10^{17} \rho^2 x_{\text{He}}^3 \left(\frac{10}{T} \right)^3 e^{-4670 \cdot \frac{10^6}{T}}, \quad (7,3,3)$$

где через x_{He} обозначено содержание гелия.

Энергия, выделяемая источниками в глубоких недрах звезды, переносится к ее наружным слоям и излучается в окружающее пространство. Способы переноса энергии зависят от вида равновесия звезды. Если равновесие является статическим, при котором макроскопических перемещений звездного вещества нет, то энергия переносится излучением, медленно диффундирующим к внешней поверхности звезды. В этом случае равновесие звезды называют *лучистым*.

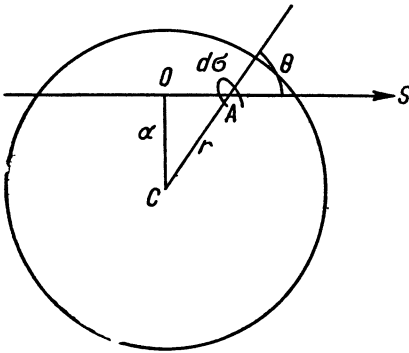


Рис. 27.

Количественный расчет показывает, что в условиях звездных недр лучистый перенос энергии

на три-четыре порядка превосходит передачу энергии теплопроводностью и потому последней можно пренебречь.

Если в звезде происходит конвективное перемешивание, то оно является основным механизмом переноса энергии, преобладающим не только над теплопроводностью, но и над лучистым переносом. В этом случае равновесие звезды называют *конвективным*.

Рассмотрим перенос энергии в звезде, находящейся в лучистом равновесии. Обозначим через I_ν интенсивность пучка излучения, распространяющегося в направлении s , проходящем через точку A под углом θ к радиусу-вектору r (рис. 27). Интенсивность удовлетворяет уравнению лучистого переноса $\frac{d}{ds} I_\nu = \epsilon_\nu - \alpha_\nu I_\nu$, где ϵ_ν , α_ν — коэффициенты излучения и поглощения.

Коэффициент поглощения представляет собой некоторую функцию частоты; заменим ее средним значением $\bar{\alpha}_\nu = \alpha$, допустив, таким образом, что звездное вещество является «серым», одинаково поглощающим во всех частях спектра. Примем также, что при взаимодействии излучения со звездным веществом выполняется закон Кирхгофа — Планка $\epsilon_\nu = \alpha B_\nu$, где B_ν — функция Планка, равная

интенсивности поля излучения при термодинамическом равновесии.

Выполнив интегрирование по частоте, уравнение переноса при сделанных упрощениях можно написать в следующем виде:

$$\frac{dI}{ds} = \alpha B - \alpha I; \quad B = \frac{ac}{4\pi} T^4, \quad (7,3,4)$$

где I — полная (интегральная) интенсивность излучения, B — функция Стефана — Больцмана, равная полной интенсивности поля излучения при термодинамическом равновесии. Через s и a обозначены скорость света и коэффициент пропорциональности в законе Стефана — Больцмана для интегральной плотности поля излучения.

Интенсивность излучения в (7,3,4) будем рассматривать как функцию полярных координат r, θ (см. рис. 27). Для перехода воспользуемся соотношениями $r \cos \theta = s, r \sin \theta = a$, из которых следует: $\frac{dr}{ds} = \cos \theta, r \frac{d\theta}{ds} = -\sin \theta$.

Выполнив преобразование $\frac{d}{ds} = \frac{\partial}{\partial r} \frac{dr}{ds} + \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{d\theta}{ds}$, представим уравнение переноса в форме

$$\frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} = \alpha B - \alpha I,$$

или

$$I = B - \frac{1}{\alpha} \left(\frac{\partial I}{\partial r} \cos \theta - \frac{\partial I}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{r} \right). \quad (7,3,5)$$

Можно показать, что на достаточно большой глубине второй член правой части (7,3,5) по абсолютному значению гораздо меньше первого. Поэтому с удовлетворительной для наших целей точностью во втором члене можно положить $I = B$. Следовательно,

$$I(r, \theta) = B - \frac{1}{\alpha} \frac{dB}{dr} \cos \theta. \quad (7,3,6)$$

В теории внутреннего строения звезд эта формула обеспечивает достаточно хорошее приближение.

Вычислим плотность энергии и поток поля излучения внутри звезды. Первая из этих величин определяется формулой $\rho_r = \frac{1}{c} \int I d\omega$. Через $d\omega$ здесь обозначен элементарный телесный угол, внутри которого в данную точку поступает пучок излучения с интенсивностью I . Введя азимут φ , можно написать $d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi$. При интегрировании угол φ изменяется в пределах от 0 до 2π , а θ принимает значения от 0 до π . Внося (7,3,6) и выполнив интегрирование, получим $\rho_r = \frac{4\pi}{c} B = aT^4$. Это показывает, что внутри

звезды плотность энергии поля излучения определяется таким же законом, как при термодинамическом равновесии.

Обозначим через $H(r)$ поток поля излучения, т. е. количество энергии, которую в секунду переносит излучение через единичную площадку, помещенную на расстоянии r от центра звезды и расположенную нормально к радиальному направлению. Эта величина вычисляется по формуле $H(r) = \int I \cos \theta d\omega$. Воспользовавшись соотношением (7,3,6), найдем

$$H(r) = -\frac{4\pi}{3\alpha} \frac{dB}{dr} = -\frac{4\pi}{3\alpha} \frac{dB}{dT} \frac{dT}{dr},$$

или, если внести выражение функции Стефана — Больцмана, согласно (7,3,4),

$$H(r) = -\frac{4ac}{3\alpha} T^3 \frac{dT}{dr}. \quad (7,3,7)$$

Этим равенством определяется лучистый перенос энергии в звезде.

Вычислим еще давление радиации внутри звезды.

Пучок излучения, проходящий через нормальную к r площадку $d\sigma$ в направлении s внутри элементарного телесного угла $d\omega$ (см. рис. 27), переносит в секунду импульс $\frac{1}{c} I \cos \theta d\omega d\sigma$. Проекция этого импульса на радиальное направление, отнесенная к единичной площадке, равна $\frac{1}{c} I \cos^2 \theta d\omega$. Поэтому полный перенос импульса в указанном направлении, т. е. лучистое давление, составляет $p_r = \frac{1}{c} \int I \cos^2 \theta d\omega$. Вычисление с помощью (7,3,6) приводит к значению $p_r = \frac{4\pi}{3c} B = \frac{1}{3} aT^4$, совпадающему с известным законом термодинамического равновесия.

Большинство известных звезд, образующих так называемую главную последовательность диаграммы спектр — светимость, состоит из вещества, которое с высокой степенью точности можно считать идеальным газом, удовлетворяющим классической статистике Больцмана. В частности, звездное вещество отвечает обычной формуле Клапейрона $p = \frac{R}{\mu} \rho T$, где R — универсальная газовая постоянная, μ — молекулярный вес звездного вещества, т. е. приходящееся на одну частицу среднее значение массы, выраженное в относительных единицах (с достаточной точностью эту единицу можно отождествить с массой атома водорода). Для смеси нейтральных газов молекулярный вес определяется точным химическим составом вещества. В нашем случае вычисление этой величины значительно упрощается и не требует точного знания химического состава веще-

ства, так как последнее в глубоких недрах звезды почти полностью ионизировано.

Составим общую формулу для молекулярного вещества в предположении полной ионизации.

Обозначим через x_i относительное содержание в звездном веществе элемента с атомным весом A_i и зарядом ядра Z_i . Если ρ — плотность вещества, то в 1 см^3 данный элемент имеет массу ρx_i , а число его атомов равно $\frac{\rho x_i}{A_i m_p}$, где m_p — абсолютная масса протона. Число частиц (ядер и свободных электронов), возникающих в 1 см^3 при ионизации этого элемента, равно $\frac{\rho x_i}{A_i m_p} (Z_i + 1)$. Полное число частиц составляет $\frac{\rho}{m_p} \sum \frac{x_i}{A_i} (Z_i + 1)$. Разделив массу вещества в объеме 1 см^3 , выраженную в относительных единицах (т. е. величину $\frac{\rho}{m_p}$), на полное число частиц, получим

$$\mu = \frac{1}{\sum \frac{x_i}{A_i} (Z_i + 1)}.$$

Выделим два члена суммы, соответствующие водороду и гелию. В выражении

$$2x_{\text{H}} + \frac{3}{4} x_{\text{He}} + \sum \frac{x_i}{A_i} (z_i + 1)$$

суммирование относится ко всем более тяжелым элементам, входящим в состав звездного вещества. Для этих элементов можно принять $\frac{Z_i + 1}{A_i} \simeq \frac{1}{2}$. Следовательно, предыдущее выражение примет вид

$$2x_{\text{H}} + \frac{3}{4} x_{\text{He}} + \frac{1}{2} \sum x_i.$$

Внося сюда очевидное значение $\sum x_i = 1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}}$, находим

$$\mu = \frac{1}{2x_{\text{H}} + \frac{3}{4} x_{\text{He}} + \frac{1}{2} (1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}})}. \quad (7,3,8)$$

В теории внутреннего строения звезд эта приближенная формула обеспечивает удовлетворительную точность. Отказ от соотношения $\frac{Z_i + 1}{A_i} \simeq \frac{1}{2}$ и задание определенного химического состава звездного вещества изменяют коэффициент при трехчлене $1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}}$, однако это изменение во всех случаях оказывается сравнительно небольшим. Так, если принять, что наиболее обильные из тяжелых элементов, входящих в состав звездного вещества, составляют

смесь Рассела *, то коэффициент при указанном трехчлене будет равен 0,54. Имеется также возможность ввести поправку, учитывающую неполную ионизацию звездного вещества. Для данного химического состава она вычисляется в зависимости от температуры и электронной концентрации.

Для чистого водорода ($x_H = 1, x_{He} = 0$) формула (7,3,8) дает $\mu = \frac{1}{2}$, для гелия ($x_H = 0, x_{He} = 1$) $\mu = \frac{4}{3}$, тогда как для вещества, состоящего из более тяжелых химических элементов, получается $\mu = 2$. Следует поэтому ожидать, что при полной ионизации звездного вещества его молекулярный вес заключен в пределах от $\frac{1}{2}$ до 2.

Для расчета внутреннего строения звезды необходимо знать коэффициент поглощения или, как его часто называют в астрофизике, коэффициент непрозрачности звездного вещества. Основными механизмами непрерывного поглощения в звездах являются фотоионизация (связанно-свободные переходы), свободно-свободные переходы и томсоновское рассеяние света на свободных электронах. Хорошо разработанная теория поглощения в каждом из перечисленных случаев позволяет получить надежные формулы, которые мы здесь не приводим. В двух первых случаях они определяют коэффициенты поглощения в виде функций частоты. Между тем составленная выше формула (7,3,7) найдена для «серого вещества», отвечающего постоянному значению коэффициента поглощения для всего спектра. Для ее обоснования необходимо убедиться в том, что столь сильное упрощение не вносит существенных погрешностей при вычислении переноса энергии.

Возвращаясь к уравнению переноса для удельной интенсивности и повторяя рассуждения, которые привели нас к формуле (7,3,6), нетрудно получить аналогичное соотношение

$$I_\nu = B_\nu - \frac{1}{\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dr} \cos \theta,$$

представляющее собой приближенное выражение удельной интенсивности в направлении, образующем угол θ с радиусом-вектором данной точки. С его помощью найдем удельный поток излучения

$$H_\nu(r) = - \frac{4\pi}{3\alpha_\nu} \frac{dB_\nu}{dT} \frac{dT}{dr}. \quad (7,3,9)$$

Если формула (7,3,7) дает правильную величину переноса энергии, то она должна совпадать с результатом интегрирования выражения (7,3,9) по частоте. Условием такого совпадения является

* В астрофизике смесью Рассела называют вещество с относительным составом O : (Na + Mg) : Si : (K + Ca) : Fe = 8 : 4 : 1 : 1 : 2.

специальный выбор коэффициента α . После интегрирования и упомянутого сравнения получим

$$\frac{1}{\alpha} = \frac{\int_0^{\infty} \frac{1}{\alpha_{\nu}} \frac{dB_{\nu}}{dT} d\nu}{\frac{dB}{dT}}. \quad (7,3,10)$$

Вычисление переноса энергии на основе гипотезы «серого вещества» позволяет получить правильный количественный результат, если постоянное значение коэффициента поглощения найдено согласно закону усреднения (7,3,10). Это постоянное значение называют росселандовым средним.

Не производя вычислений, которые связаны с довольно громоздкими выкладками, но с интересующей нас точки зрения не имеют существенного значения, мы приведем здесь только конечные результаты в виде формул, непосредственно применяемых в теории внутреннего строения звезд.

В случае фотоэлектрического поглощения росселандово среднее определяется приближенной формулой Крамерса

$$\alpha = 4,34 \cdot 10^{25} (1 + x_{\text{H}})(1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}}) \frac{\bar{g}}{t} \frac{\rho^2}{T^{3,5}}, \quad (7,3,11)$$

где \bar{g} — среднее значение множителя Гаунта, а t — фактор, учитывающий некоторые поправки к закону Крамерса и получивший название гильотинного множителя. Оба поправочных множителя по порядку не сильно отличаются от единицы, и потому их часто не принимают во внимание, полагая $\frac{\bar{g}}{t} \simeq 1$.

Формула Крамерса для свободно-свободных переходов такова:

$$\alpha = 3,68 \cdot 10^{22} (1 + x_{\text{H}})(x_{\text{H}} + x_{\text{He}}) \bar{g} \frac{\rho^2}{T^{3,5}}. \quad (7,3,12)$$

Третий из упомянутых процессов — томсоновское рассеяние света на свободных электронах — нейтральный, происходящий с одним и тем же коэффициентом во всех частотах. Его с достаточной точностью определяют формулой

$$\alpha = 0,19\rho(1 + x_{\text{H}}). \quad (7,3,13)$$

Для большинства звезд главной последовательности основную роль в механизме непрерывного поглощения играют связанно-свободные и свободно-свободные переходы. Количественное соотношение между ними определяется содержанием водорода и гелия в звездном веществе. Если $1 - x_{\text{H}} - x_{\text{He}} \geq 0,02$ (тяжелые элементы составляют не менее 2% вещества по массе), то преобладают

связанно-свободные переходы (фотоионизация). При большем содержании водорода и гелия заметно влияют на непрозрачность звездного вещества и свободно-свободные переходы.

Томсоновское рассеяние света на электронах играет роль при очень высоких температурах и низких плотностях.

4. Уравнения строения звезды. Переходим к составлению общих уравнений внутреннего строения звезды с учетом условий в ее недрах.

Первым из этих уравнений является условие гравитационного равновесия, которое мы будем писать в форме (7,1,2), присоединяя к нему очевидное соотношение $dM(r) = 4\pi r^2 \rho dr$. Однако, в отличие от теории политропных шаров Эмдена, в которой функция ρ отождествлялась с газовым давлением, в теории внутреннего строения звезд в общем случае необходимо принимать во внимание не только газовое, но и лучистое давление. Для предварительной оценки его составим отношение величины $p_r = \frac{1}{3} a T_c^4$ к газовому давлению в центре конфигурации. С помощью приближенных соотношений (7,1,9) находим

$$\frac{p_r}{p_c} \simeq \frac{\pi a \gamma^3}{18 R^4} \mu^4 M^2 = 8,2 \cdot 10^{-69} (\mu^2 M)^2. \quad (7,4,1)$$

Мы видим, что отношение лучистого давления к газовому в центральной части конфигурации определяется молекулярным весом и массой звезды. При заданном молекулярном весе оно возрастает пропорционально квадрату массы. Аналогичная зависимость существует и в политропном шаре, в чем легко убедиться при помощи формул (7,2,5).

Положив в (7,4,1) $\mu \simeq 1$ и $M = M_\odot$, получим $\frac{p_r}{p_c} \simeq 0,03$. Это показывает, что в звездах, массы которых близки к солнечной, лучистое давление не играет существенной роли. При переходе к ранним спектральным классам, которым присущи более значительные звездные массы, роль лучистого давления должна быстро возрастать. Однако для надежной количественной оценки величины $\frac{p_r}{p_c}$ соотношением (7,4,1) в этих случаях пользоваться нельзя, поскольку оно основано на формулах (7,1,9), при выводе которых лучистое давление во внимание не принималось.

Третье уравнение строения звезды выражает наличие в ней внутренних источников энергии.

Обозначим через $L(r)$ мощность источников, расположенных внутри сферы радиуса r . В стационарной звезде эта величина равна также потоку энергии через указанную сферу, поскольку генерация энергии источниками должна компенсироваться ее переносом к внешним слоям звездного вещества. Приращение $dL(r)$ этой функции