связанно-свободные переходы (фотоионизация). При бо́льшем содержании водорода и гелия заметно влияют на непрозрачность звездного вещества и свободно-свободные переходы.

Томсоновское рассеяние света на электронах играет роль при очень высоких температурах и низких плотностях.

4. Уравнения строения звезды. Переходим к составлению общих уравнений внутреннего строения звезды с учетом условий в ее недрах.

Первым из этих уравнений является условие гравитационного равновесия, которое мы будем писать в форме (7,1,2), присоединяя к нему очевидное соотношение $dM(r) = 4\pi r^2 \rho\, dr$. Однако, в отличие от теории политропных шаров Эмдена, в которой функция p отождествлялась с газовым давлением, в теории внутреннего строения звезд в общем случае необходимо принимать во внимание не только газовое, но и лучистое давление. Для предварительной оценки его составим отношение величины $p_r = \frac{1}{3} a T_c^4$ к газовому давлению в центре конфигурации. С помощью приближенных соотношений (7,1,9) находим

$$\frac{p_r}{p_c} \simeq \frac{\pi a \gamma^3}{18 R^4} \mu^4 M^2 = 8{,}2 \cdot 10^{-69} (\mu^2 M)^2. \qquad (7,4,1)$$

Мы видим, что отношение лучистого давления к газовому в центральной части конфигурации определяется молекулярным весом и массой звезды. При заданном молекулярном весе оно возрастает пропорционально квадрату массы. Аналогичная зависимость существует и в политропном шаре, в чем легко убедиться при помощи формул (7,2,5).

Положив в (7,4,1) $\mu \simeq 1$ и $M = M_\odot$, получим $\frac{p_r}{p_c} \simeq 0{,}03$. Это показывает, что в звездах, массы которых близки к солнечной, лучистое давление не играет существенной роли. При переходе к ранним спектральным классам, которым присущи более значительные звездные массы, роль лучистого давления должна быстро возрастать. Однако для надежной количественной оценки величины $\frac{p_r}{p_c}$ соотношением (7,4,1) в этих случаях пользоваться нельзя, поскольку оно основано на формулах (7,1,9), при выводе которых лучистое давление во внимание не принималось.

Третье уравнение строения звезды выражает наличие в ней внутренних источников энергии.

Обозначим через $L(r)$ мощность источников, расположенных внутри сферы радиуса r. В стационарной звезде эта величина равна также потоку энергии через указанную сферу, поскольку генерация энергии источниками должна компенсироваться ее переносом к внешним слоям звездного вещества. Приращение $dL(r)$ этой функции представляет собой мощность источников, находящихся в тонком слое между сферами радиусов r и $r + dr$. Сохраняя прежнее обозначение, можно написать $dL(r) = 4\pi r^2 \rho \varepsilon dr$, где ε определяется принятой в данной модели гипотезой о природе источников энергии.

Четвертое уравнение зависит от механизма переноса энергии в звезде. Если допустить, что этот перенос осуществляется излучением, то поток $H(r)$ энергии через единичную площадку, расположенную перпендикулярно к радиальному направлению и помещенную на расстоянии r от центра звезды, равен, как мы видели, величине (7,3,7). Внося ее в очевидное соотношение $L(r) = 4\pi r^2 H(r)$, получим

$$\frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\pi ac}\frac{\alpha L(r)}{r^2 T^3},$$

где α — росселандово среднее коэффициента непрерывного поглощения.

Таким образом, для звезды, находящейся в лучистом равновесии, мы имеем систему четырех дифференциальных уравнений:

$$\frac{dp}{dr} = -\frac{\gamma M(r)\rho}{r^2}; \quad \frac{dM(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho;$$

$$\frac{dL(r)}{dr} = 4\pi r^2 \rho \varepsilon; \quad \frac{dT}{dr} = -\frac{3}{16\pi ac}\frac{\alpha L(r)}{r^2 T^3}. \tag{7,4,2}$$

К этим уравнениям необходимо присоединить соотношение для гидростатического давления, а также формулы, выражающие физическую природу источников энергии и механизм непрозрачности звездного вещества.

$$p = \frac{R}{\mu}\rho T + \frac{1}{3}aT^4; \quad \varepsilon = \varepsilon(\rho, T, x_i); \quad \alpha = \alpha(\rho, T, x_i). \tag{7,4,3}$$

Принимая химический состав одинаковым во всех слоях звезды, следует считать, что величины x_i, характеризующие относительное обилие различных элементов, играют роль постоянных параметров.

Функции ε и α должны быть выбраны в виде (7,3,1) или (7,3,2), а также в соответствии с законами непрерывного поглощения (7,3,11), (7,3,12) или (7,3,13) в зависимости от типа изучаемой звезды и ее химического состава.

Если равенства (7,4,3) внести в (7,4,2), то получится довольно сложная система четырех дифференциальных уравнений первого порядка относительно функций $\rho(r)$, $T(r)$, $M(r)$, $L(r)$. Ее решение в общем виде оказывается невозможным, и потому приходится прибегнуть к численному интегрированию. Решение системы должно отвечать условиям:

1) в центре звезды

$$r = 0, \quad M(r) = 0, \quad L(r) = 0; \tag{7,4,4}$$

2) на внешней границе

$$r = r_1, \qquad \rho = 0, \qquad T = 0^*,$$
$$M(r) = M, \quad L(r) = L, \tag{7,4,5}$$

в которых через r_1, M, L обозначены радиус, масса и светимость звезды соответственно.

Поскольку однозначное решение уравнений (7,4,2), составляющих систему четвертого порядка, определяется четырьмя условиями, а число условий (7,4,4), (7,4,5) равно шести, следует ожидать, что между тремя основными параметрами звезды — радиусом, массой и светимостью существуют два независимых соотношения. Рассмотрим этот вопрос подробнее.

Уравнения строения звезды имеют в общем случае четыре интеграла, содержащие четыре произвольные постоянные; их можно написать так:

$$F_i\,[r, \rho(r), T(r), M(r), L(r); x_{\mathrm{H}}, x_{\mathrm{He}}; C_1, \ldots, C_4] = 0. \tag{7,4,6}$$

Из всех величин x_i, характеризующих химический состав звездного вещества, мы включили сюда лишь x_{H} и x_{He}, оставляя их значения неопределенными. В случае углеродного цикла в выражение функции ε (ρ, T), согласно (7,3,2), входит также x_{CN}; однако этой величине мы можем приписать, как это обыкновенно делают, конкретное числовое значение.

Внесем в (7,4,6) условия (7,4,5). Полученные уравнения позволяют выразить постоянные интегрирования через пять параметров звезды: r_1, M, L, x_{H}, x_{He}, вследствие чего интегралы (7,4, 6) можно написать в следующем виде:

$$f_i\,[r, \rho(r), T(r), M(r); L(r); r_1, M, L, x_{\mathrm{H}}, x_{\mathrm{He}}] = 0.$$

Внося сюда условия (7,4,4), находим

$$f_i\,[0, \rho_c, T_c, 0, 0; r_1, M, L, x_{\mathrm{H}}, x_{\mathrm{He}}] = 0.$$

Два из этих равенств позволяют определить ρ_c и T_c, выразив их через параметры звезды. Подставив найденные таким образом значения ρ_c, T_c в два другие равенства, получим

$$\varphi_i(r_1, M, L, x_{\mathrm{H}}, x_{\mathrm{He}}) = 0; \quad i = 1, 2, \tag{7,4,7}$$

что и подтверждает высказанное выше утверждение о существовании двух независимых соотношений между параметрами звезды.

Доказанное утверждение получило название **теоремы Фогта — Рассела**. В частности, из этой теоремы следует, что для звезды с принятым способом генерации энергии и заданным законом

* Температура внешнего слоя звезды, разумеется, отлична от нуля. Однако она ничтожна по сравнению с температурой внутренних областей, измеряемой миллионами градусов. Поэтому при расчете внутреннего строения для нее можно принять нулевое значение.

непрозрачности внутреннее строение однозначно определяется тремя параметрами.

Если заданы радиус, масса и светимость звезды, то при указанных допущениях величины x_{H}, x_{He} определяются соотношениями (7,4,7), вследствие чего система уравнений (7,4,2) приобретает вполне конкретную форму и вместе с условиями (7,4,4) (7,4,5) позволяет найти однозначное решение задачи.

Три параметра, принятые при интегрировании уравнений строения звезды, могут быть, конечно, выбраны и другим способом: можно, например, задать массу и химический состав звезды, а ее радиус и светимость считать искомыми.

Последнее из уравнений (7,4,2) составлено в предположении лучистого равновесия, при котором энергия в звезде переносится излучением. Между тем, как уже указывалось, в звезде возможно также конвективное равновесие, когда механизмом передачи энергии являются регулярные движения звездного вещества. В теории внутреннего строения звезд допускается, что лучистое равновесие существует в тех случаях, когда оно устойчиво. Неустойчивое лучистое равновесие практически невозможно, так как любое случайное возмущение нарушило бы его и вызвало бы переход к конвективному равновесию.

Для устойчивости лучистого равновесия необходимо и достаточно, чтобы соответствующий ему градиент температуры по абсолютному значению был меньше градиента температуры при адиабатическом равновесии: $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{луч}} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{ад}}$. При соблюдении этого условия элемент вещества, переместившийся под влиянием возмущающей силы в более высокий слой звезды, будет иметь большую плотность, чем окружающая его среда, и потому на него будет действовать бóльшая сила тяжести, стремящаяся вернуть его в исходное положение. Возмущение вызывает в этом случае появление сил, восстанавливающих равновесие. Если же лучистый градиент температуры по абсолютной величине больше адиабатического, то при подъеме элемента вещества его плотность окажется меньше плотности окружающей среды, на него будет действовать меньшая сила тяжести, и потому подъем элемента будет продолжаться и без возмущающей силы. К аналогичным заключениям приводит рассмотрение погружения элемента.

Убедившись в том, что гипотеза лучистого равновесия приводит к условию $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{луч}} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{\text{ад}}$, необходимо отказаться от этой гипотезы и допустить конвективное равновесие в звезде. При этом последнее уравнение (7,4,2) должно быть заменено новым.

В случае конвективного равновесия состояние элемента звездного вещества, переходящего из одного слоя в другой, изменяется вследствие механического и теплового взаимодействия с окружающей средой. Количественные оценки показывают, что обмен энергией путем теплопроводности и лучистого переноса относительно мал, вследствие чего основной причиной, определяющей изменение состояния данного элемента, является его механическое взаимодействие с прилегающими слоями звездного вещества. Поэтому с достаточной точностью выполняется закон адиабаты, который мы здесь напишем в виде $T \sim p^{1-\frac{1}{k}}$, или $\ln T = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\ln p + \text{const}$. Дифференцируя это равенство, получим

$$\frac{dT}{dr} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)\frac{T}{p}\frac{dp}{dr}. \qquad (7,4,8)$$

Этим уравнением и должно быть заменено последнее уравнение системы (7,4,2) в случае конвективного равновесия.

Принимая химический состав вещества одинаковым во всех слоях звезды, следует считать, что в уравнениях системы (7,4,2) величины x_i, характеризующие относительное содержание различных элементов, играют роль постоянных параметров. Однако это допущение имеет ограниченное значение и может относиться только к начальной эпохе существования звезды с термоядерной генерацией энергии. Протон-протонные реакции и углеродный цикл, сопровождающиеся превращением водорода в гелий, постепенно изменяют химический состав звездного вещества, причем скорость этого процесса различна в разных частях звезды.

По известному дефекту массы нетрудно вычислить количество энергии, освобождающееся при образовании α-частицы; оно составляет около $4{,}4 \cdot 10^{-5}$ *эрг*. Некоторую часть энергии уносят из звезды нейтрино, и потому указанное значение должно быть соответствующим образом уменьшено. С учетом этой поправки получается, что на каждую образующуюся α-частицу звезда получает энергию: при протон-протонной реакции $4{,}2 \cdot 10^{-5}$ *эрг*, при углеродном цикле — $4{,}0 \cdot 10^{-5}$ *эрг*.

Составив отношение этих величин к массе α-частицы, найдем, что на единицу массы образующегося в звезде гелия генерация энергии равна $E_{pp} = 6{,}3 \cdot 10^{18}$ и $E_{cc} = 6{,}0 \cdot 10^{18}$ *эрг/г* соответственно. Поскольку выход энергии в 1 $см^3$ составляет в секунду $\rho\varepsilon_{pp}$ и $\rho\varepsilon_{cc}$, массы расходуемого за то же время водорода в процессе рассматриваемых реакций равны $\frac{\rho\varepsilon_{pp}}{E_{pp}}$ и $\frac{\rho\varepsilon_{cc}}{E_{cc}}$. С другой стороны, полная убыль массы водорода в единице объема должна составить $-\rho\frac{dx_{\text{H}}}{dt}$. Следовательно,

$$\frac{dx_{\text{H}}}{dt} = -\frac{\varepsilon_{pp}}{E_{pp}} - \frac{\varepsilon_{cc}}{E_{cc}}. \qquad (7,4,9)$$

Изменение содержания гелия в звездном веществе отличается от (7,4,9) только знаком.

Формулы (7,3,1) и (7,3,2), определяющие зависимость ε_{pp} и ε_{cc} от физических условий, показывают, что скорость изменения химического состава зависит от расстояния до центра звезды. В центре она значительна, с удалением от него довольно быстро убывает. В случае конвективного равновесия возникающие неоднородности сглаживаются вследствие перемешивания звездного вещества. Например, если ядро звезды конвективное, то в различных частях его химический состав практически одинаков, хотя может сильно отличаться от состава окружающей оболочки, находящейся в лучистом равновесии. Если же равновесие ядра лучистое, то с удалением от центра содержание водорода в звездном веществе возрастает, а гелия — убывает.

5. Строение звезд главной последовательности. По современным представлениям, термоядерные реакции приобретают существенное значение и начинают играть роль основного источника энергии с момента выхода звезды на главную последовательность, когда завершается сравнительно короткая и самая ранняя стадия звездной эволюции — гравитационное сжатие. На этой стадии звезда представляет собой относительно холодный газовый шар, постепенно уплотняющийся под влиянием сил тяготения. Скорость уплотнения зависит от излучения звезды, поскольку, по теореме вириала, около половины освобождающейся гравитационной энергии должно отдаваться в окружающее пространство. Вторая половина, превращаясь в тепло, вызывает нагревание звездного вещества.

Процесс гравитационного сжатия может несколько задержаться термоядерными реакциями, протекающими при относительно низких температурах,— реакциями с участием дейтерия, лития, бериллия и бора. Однако оценки, выполненные с учетом известного космического обилия этих элементов, показывают, что роль таких реакций невелика, и потому при изучении гравитационного сжатия ими можно пренебречь.

Расчет показывает, что продолжительность стадии гравитационного сжатия, завершающейся выходом звезды на главную последовательность и началом термоядерной генерации энергии, довольно сильно зависит от массы звезды. Длительность этой стадии можно рассчитать по формуле

$$\tau \simeq \frac{3}{2} \frac{\gamma M^2}{r_1 L}, \qquad (7,5,1)$$

где r_1 и L — радиус и светимость звезды в конце рассматриваемой стадии.

Внося в (7,5,1) значения массы, радиуса и светимости Солнца, получим $\tau = 5 \cdot 10^7$ лет.