медленно, поскольку их светимости долгое время почти точно компенсируются выделением энергии при термоядерных реакциях. Для иллюстрации мы приведем изменение светимости, радиуса и эффективной температуры Солнца согласно расчетам М. Шварцшильда, выполненным в предположении, что со времени вступления Солнца на главную последовательность прошло $5 \cdot 10^9$ лет.

$$\frac{L_{\text{совр}}}{L_{\text{нач}}} = 1{,}6; \quad \frac{r_{1\ \text{совр}}}{r_{1\ \text{нач}}} = 1{,}04; \quad \frac{T_{\text{э совр}}}{T_{\text{э нач}}} = 1{,}1.$$

**6. Белые карлики.** Белые карлики составляют особый класс небесных тел, которые по своим свойствам сильно отличаются от звезд главной последовательности. При массах, близких к солнечной, эти звезды имеют радиусы, измеряемые сотыми долями радиуса Солнца, вследствие чего средние плотности их вещества достигают $10^5 - 10^6\ г \cdot см^{-3}$. Светимости белых карликов обыкновенно составляют $10^{-2}$, $10^{-4}$ светимости Солнца, а эффективные температуры обычно соответствуют спектральному классу A. На диаграмме Герцшпрунга — Рассела звезды этого класса расположены приблизительно параллельно главной последовательности, но на 8—9 звездных величин ниже последней. Первый из белых карликов — спутник Сириуса — был открыт Альваном Кларком в 1862 г. Это звезда с массой 0,98 $M_\odot$ и светимостью около 0,002 $L_\odot$, принадлежащая спектральному классу A5. Радиус Сириуса B составляет 15—20 тыс. *км*.

Особенности внутреннего строения белых карликов обусловлены тем, что в присущих этим звездам условиях плотности и температуры вещество не следует обычным законам идеальных газов. Как известно, система частиц, находящаяся в термодинамическом равновесии, удовлетворяет классической статистике Больцмана в том случае, если параметр

$$\lambda = \frac{2\,(2\pi mkT)^{\frac{3}{2}}}{h^3 n} \tag{7,6,1}$$

значительно превосходит единицу. Если же при данных температуре $T$ и концентрации частиц $n$ этот параметр меньше единицы, в системе проявляются квантово-механические эффекты — наступает, как принято говорить, вырождение газа, свойства которого описываются квантовой статистикой.

Будем для простоты считать, что звездное вещество состоит из полностью ионизированных атомов химического элемента с атомным весом $A$ и зарядом ядра $Z$. При заданной плотности $\rho$ в этом случае электронная концентрация $n_e = \frac{\rho Z}{m_p A}$, что при $\rho \simeq 10^6\ г \cdot см^{-3}$ дает $n_e \simeq 10^{30} Z A^{-1}$. Для концентрации ядер находим $n_a \simeq 10^{30} A^{-1}$.

Применяя формулу (7,6,1) к электронному газу ($m = m_e$) и к газу, состоящему из тяжелых частиц звездного вещества ($m = m_p A$), можно убедиться в том, что при температурах $10^6$, $10^{7°}$ К и при $A \gg 4$ в первом случае $\lambda \ll 1$, а во втором $\lambda > 1$. Это показывает, что в веществе белых карликов ядра атомов образуют обычный идеальный газ, удовлетворяющий классической статистике Больцмана, тогда как электронный газ находится в состоянии сильного вырождения, отвечающего квантовой статистике Ферми — Дирака.

При всех значениях $T$, обеспечивающих выполнимость условия $\lambda \ll 1$, уравнение состояния вырожденного газа не зависит от температуры и будет таким же, как при $T = 0$. Вещество принято в этом случае называть холодным.

Статистика Ферми — Дирака приводит в общем случае к следующему уравнению состояния, связывающему электронное давление с плотностью звездного вещества:

$$p_e = Af(x); \quad \rho = Bx^3, \tag{7,6,2}$$

где

$$f(x) = x(2x^2 - 3)(1 + x^2)^{\frac{1}{2}} + 3 \operatorname{arcsh} x, \tag{7,6,3}$$

а через $A$ и $B$ обозначены постоянные

$$A = \frac{\pi m^4 c^5}{3h^3}; \quad B = \frac{8\pi c^3 m^3 m_p \mu_e}{3h^3}. \tag{7,6,4}$$

Входящий сюда параметр $\mu_e$ представляет собой среднюю относительную массу звездного вещества, приходящуюся на один электрон. По определению, $\mu_e = \frac{\rho}{m_p} : n_e$. При полной ионизации электронная концентрация определяется очевидной формулой $n_e = \frac{\rho}{m_p} \sum x_i Z_i : A_i$, где $x_i$ — относительное содержание элемента с атомным весом $A_i$ и зарядом ядра $Z_i$. Выделив член, соответствующий водороду, и принимая во внимание, что для других элементов отношение $\frac{Z_i}{A_i}$ в среднем составляет около $\frac{1}{2}$, получим $n_e = \frac{\rho}{2m_p}(1 + x_{\text{H}})$.

Следовательно,

$$\mu_e = \frac{2}{1 + x_{\text{H}}}. \tag{7,6,5}$$

Параметр $x$ в (7,6,2), связывающий электронное давление с плотностью вещества, равен отношению $\frac{p_{\text{макс}}}{mc}$, где $p_{\text{макс}}$ — наибольшее значение импульса электрона в данной системе. При $x \ll 1$ вырождение газа называется нерелятивистским, а в случае $x \gg 1$, когда в газе имеются очень быстрые частицы, обнаруживающие сильные эффекты специальной теории относительности, вырождение является релятивистским. При достаточно больших значениях $x$ первое уравнение (7,6,2) принимает вид $p_e = 2Ax^4$. Сравнивая его с формулой для плотности и принимая во внимание значения постоянных (7,6,4), найдем

$$p_e = C\rho^{\frac{4}{3}}; \quad C = \frac{ch}{8}\left(\frac{3}{\pi m_p^4 \mu_e^4}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{7,6,6}$$

Уравнение состояния при сильном релятивистском вырождении формально совпадает с законом политропы при $n = 3$.

Стационарная звезда представляет собой конфигурацию, равновесие которой определяется взаимодействием между гравитацией и давлением. Полное давление внутри звезды находится по формуле $p = p_e + p_a + p_r$, где $p_e$ и $p_a$ — парциальные давления электронов и тяжелых частиц, $p_r$ — давление излучения. Для сравнения отдельных слагаемых можно воспользоваться формулой (7,6,6) и очевидными соотношениями $p_a = n_a kT$, $p_r = \frac{1}{3} aT^4$. Простое вычисление дает $\frac{p_e}{p_a} \gg 1$ и $\frac{p_e}{p_r} \gg 1$. Поэтому с достаточной точностью следует положить $p = p_e$.

Вывод о сильном вырождении электронного газа в белых карликах основан на оценках средних плотностей звезд этого класса. Поскольку у внешней границы звезды плотность вещества должна быть малой, следует считать, что наружные слои белых карликов состоят из обычного идеального газа и что вырождение начинается лишь с некоторой глубины. Количественные расчеты показывают, что вследствие большой напряженности силы тяжести плотность вещества белых карликов быстро возрастает с глубиной, и потому переход к вырожденному состоянию происходит на сравнительно небольшом расстоянии от внешней границы звезды. Поэтому наружная невырожденная оболочка, обладающая лишь небольшой долей общей массы звезды, практически не влияет на строение массивного вырожденного ядра.

7. **Строение белых карликов.** Теория внутреннего строения белых карликов, отвечающая перечисленным особенностям, разработана в 1935 г. Чандрасекаром [6]. Математический аппарат ее составляют уравнение механического равновесия и параметрические уравнения состояния электронного газа Ферми (7,6,2).

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{dp}{dr} = Af'(x)\frac{dx}{dr} = \frac{8Ax^4}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dx}{dr}.$$