чае $x \gg 1$, когда в газе имеются очень быстрые частицы, обнаруживающие сильные эффекты специальной теории относительности, вырождение является релятивистским. При достаточно больших значениях x первое уравнение (7,6,2) принимает вид $p_e = 2Ax^4$. Сравнивая его с формулой для плотности и принимая во внимание значения постоянных (7,6,4), найдем

$$p_e = C\rho^{\frac{4}{3}}; \quad C = \frac{ch}{8}\left(\frac{3}{\pi m_p^4 \mu_e^4}\right)^{\frac{1}{3}}. \tag{7,6,6}$$

Уравнение состояния при сильном релятивистском вырождении формально совпадает с законом политропы при $n = 3$.

Стационарная звезда представляет собой конфигурацию, равновесие которой определяется взаимодействием между гравитацией и давлением. Полное давление внутри звезды находится по формуле $p = p_e + p_a + p_r$, где p_e и p_a — парциальные давления электронов и тяжелых частиц, p_r — давление излучения. Для сравнения отдельных слагаемых можно воспользоваться формулой (7,6,6) и очевидными соотношениями $p_a = n_a kT$, $p_r = \frac{1}{3} aT^4$. Простое вычисление дает $\frac{p_e}{p_a} \gg 1$ и $\frac{p_e}{p_r} \gg 1$. Поэтому с достаточной точностью следует положить $p = p_e$.

Вывод о сильном вырождении электронного газа в белых карликах основан на оценках средних плотностей звезд этого класса. Поскольку у внешней границы звезды плотность вещества должна быть малой, следует считать, что наружные слои белых карликов состоят из обычного идеального газа и что вырождение начинается лишь с некоторой глубины. Количественные расчеты показывают, что вследствие большой напряженности силы тяжести плотность вещества белых карликов быстро возрастает с глубиной, и потому переход к вырожденному состоянию происходит на сравнительно небольшом расстоянии от внешней границы звезды. Поэтому наружная невырожденная оболочка, обладающая лишь небольшой долей общей массы звезды, практически не влияет на строение массивного вырожденного ядра.

7. Строение белых карликов. Теория внутреннего строения белых карликов, отвечающая перечисленным особенностям, разработана в 1935 г. Чандрасекаром [6]. Математический аппарат ее составляют уравнение механического равновесия и параметрические уравнения состояния электронного газа Ферми (7,6,2).

Непосредственное вычисление дает

$$\frac{dp}{dr} = Af'(x)\frac{dx}{dr} = \frac{8Ax^4}{(1+x^2)^{\frac{1}{2}}}\frac{dx}{dr}.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\rho}\frac{dp}{dr} = \frac{8A}{B}\frac{d}{dr}(1 + x^2)^{\frac{1}{2}}.$$

Введя обозначение $y = (1 + x^2)^{\frac{1}{2}}$, из которого следует

$$x^3 = (y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}; \quad \rho = B(y^2 - 1)^{\frac{3}{2}},$$

приведем уравнение равновесия (7,1,3) к виду

$$\frac{8A}{B}\frac{d}{dr}\left(r^2\frac{dy}{dr}\right) + 4\pi\gamma r^2 B(y^2 - 1)^{\frac{3}{2}} = 0.$$

Как и прежде, примем, что плотность максимальна в центре звезды, а к периферии убывает, стремясь к нулю на внешней границе. В соответствии с этим введенная выше переменная y уменьшается от некоторого наибольшего значения y_0 в центре до единицы на поверхности звезды.

Заменим переменные

$$r = \left(\frac{2A}{\pi\gamma}\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{By_0}\eta; \quad y = y_0\varphi. \qquad (7,7,1)$$

После несложных преобразований приведем предыдущее уравнение к виду

$$\frac{d^2\varphi}{d\eta^2} + \frac{2}{\eta}\frac{d\varphi}{d\eta} + (\varphi^2 - y_0^{-2})^{\frac{3}{2}} = 0. \qquad (7,7,2)$$

При условиях в центре $\eta = 0$, $\varphi = 1$, $\frac{dy}{d\eta} = 0$ и при заданном значении y_0 это дифференциальное уравнение, называемое уравнением Чандрасекара, однозначно определяет строение белого карлика. Численное интегрирование уравнения выполняется от центра до внешней границы, которой отвечает точка η_1, соответствующая $\varphi = y_0^{-1}$. В монографии Чандрасекара [3] имеются таблицы, содержащие результаты численного интегрирования уравнения (7,7,2) для десяти различных значений параметра y_0.

Пользуясь таблицей для заданного значения y_0, легко найти распределение плотности в звезде. При помощи первого из соотношений (7,7,1) вычисляется значение переменной η, отвечающее принятому расстоянию от центра. Входя с этим значением в таблицу, находим φ, после чего плотность вычисляем по формуле $\rho = B(y^2 - 1)^{\frac{3}{2}}$. Масса конфигурации определяется с помощью очевидного соотношения

$$M = 4\pi \int_0^{r_1} r^2 \rho dr,$$

где r_1 — радиус конфигурации.

Перейдя к переменным η, φ, получим

$$M = \frac{4\pi}{B^2} \left(\frac{2A}{\pi\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} \int_0^{\eta_1} (\varphi^2 - y_0^{-2})^{\frac{3}{2}} \eta^2 d\eta,$$

откуда, согласно (7,7,2), следует

$$M = -\frac{4\pi}{B^2} \left(\frac{2A}{\pi\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} \left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1. \tag{7,7,3}$$

Таблица 4

y_0^{-2}	η_1	$-\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$
0,00	6,8968	2,0182
0,01	5,3571	1,9321
,02	4,9857	,8652
,05	,4601	,7096
,10	,0690	,5186
,20	3,7271	,2430
,30	,5803	,0337
,40	,5245	0,8598
,50	,5330	,7070
,60	,6038	,5679
,80	4,0446	,3091
1,00	∞	0,0000

Радиус конфигурации находится по формуле

$$r_1 = \left(\frac{2A}{\pi\gamma}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{\eta_1}{By_0}, \tag{7,7,4}$$

которая представляет собой первое из соотношений (7,7,1), приложенное к внешней границе звезды.

Для применения теории Чандрасекара удобно пользоваться специальной таблицей, выражающей зависимость граничных значений η_1 и $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$, от параметра y_0. Ниже приводится такая таблица, составленная по данным Чандрасекара для десяти значений η_1 (табл. 4). Зная массу белого карлика, находим величину $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$ согласно соотношению (7,7,3), затем граничное значение η_1, определяющее радиус конфигурации (7,7,4), и параметр y_0, позволяющий вычислить ход плотности с расстоянием от центра звезды.

Однозначное соотношение между массой и радиусом конфигурации очень характерно для белых карликов. Другая особенность этого класса звезд состоит в существовании верхнего предела массы. Граничное значение $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1$, связанное с массой звезды равенством (7,7,3), монотонно возрастает с увеличением y_0 и при $y_0 \to \infty$ стремится к конечному пределу. Уравнение Чандрасекара (7,7,2) переходит при этом в уравнение Эмдена для политропы $n = 3$, которому отвечает $\left(\eta^2 \frac{d\varphi}{d\eta}\right)_1 = -2,02$. Поэтому верхней границей массы белого карлика служит величина

$$M_{\text{макс}} = \frac{8{,}08\pi}{B^2}\left(\frac{2A}{\pi\gamma}\right)^{\frac{3}{2}} = 5{,}75\mu_e^{-2}M_{\odot}. \qquad (7{,}7{,}5)$$

Массы реальных звезд должны быть меньше этой величины, так как при $y_0 \to \infty$ величина η_1 остается конечной и соотношение (7,7,4) дает $r_1 \to 0$.

Параметр μ_e определяется формулой (7,6,5) в зависимости от содержания водорода в веществе звезды. Обыкновенно принимают, что в вырожденных ядрах белых карликов водород совершенно или почти полностью отсутствует, поскольку в противном случае при высокой плотности звездного вещества протон-протонные реакции были бы чрезмерно мощным источником энергии, не отвечающим низким светимостям звезд этого класса. При $x_H = 0$ имеем $\mu_e = 2$, $M_{\text{макс}} = 1{,}44\,M_{\odot}$*.

В табл. 5 приводятся массы, центральные и средние плотности и радиусы полностью вырожденных звездных конфигураций по

Таблица 5

y_0^{-2}	$\frac{M}{M_{\odot}}$	ρ_c, $г \cdot см^{-3}$	$\bar{\rho}$, $г \cdot см^{-3}$	r_1, $см$
0,00	1,44	∞	∞	0
0,01	1,38	$1{,}97 \cdot 10^9$	$7{,}40 \cdot 10^7$	$2{,}06 \cdot 10^8$
0,02	1,33	$6{,}74 \cdot 10^8$	3,14	2,72
0,05	1,22	1,63	1,02	3,84
0,10	1,08	$5{,}30 \cdot 10^7$	$4{,}20 \cdot 10^6$	4,96
0,20	0,885	1,57	1,58	6,45
0,30	0,738	$7{,}00 \cdot 10^6$	$8{,}08 \cdot 10^5$	7,50
0,40	0,612	3,60	4,58	8,60
0,50	0,505	1,96	2,68	9,60
0,60	0,405	1,07	1,54	$1{,}07 \cdot 10^9$
0,80	0,22	$2{,}24 \cdot 10^5$	$3{,}84 \cdot 10^4$	1,39
1,00	0,00	0	0	∞

Чандрасекару для $\mu_e = 2$. Радиус звезды может отличаться от табличных значений r_1 лишь незначительно, так как геометрическая толща внешнего слоя, окружающего вырожденное ядро, относительно мала.

Обыкновенно принимают, что внутренние температуры белых карликов измеряются миллионами градусов. Для обоснования этой оценки необходимо принять во внимание, что вырожденный газ обладает очень высокой теплопроводностью, вследствие чего

* Следует заметить, что более точная теория (см. п. 8) дает для верхней границы масс белых карликов несколько меньшее значение, равное $1{,}22\,M_{\odot}$.

вырожденная конфигурация, составляющая основную массу звезды, является изотермической. В отличие от этого, внешняя оболочка звезды, состоящая из обычного идеального газа, находится в лучистом равновесии и характеризуется быстрым повышением температуры с глубиной. Естественно поэтому допустить, что внутренняя температура белого карлика совпадает с температурой промежуточного слоя, расположенного между невырожденной оболочкой звезды и ее внутренним ядром. Простой расчет показывает, что эта температура удовлетворяет приближенному соотношению $T^{3,5} \sim \frac{L}{M}$ и зависит от молекулярного веса вещества оболочки и от параметра μ_e. Положив $M = M_\odot$ и принимая $x_H = 0$, $x_{He} = 0{,}9$ и, следовательно, $\mu = 1{,}38$, $\mu_e = 2$, Шварцшильд [5] находит следующую зависимость температуры от светимости звезды:

$$\frac{L}{L_\odot} = 10^{-2} \qquad 10^{-3} \qquad 10^{-4}$$

$$T = 17 \cdot 10^6 \qquad 9 \cdot 10^6 \qquad 4 \cdot 10^6 \,{}^\circ\mathrm{K}$$

Источником энергии белых карликов могут служить термоядерные реакции, в процессе которых происходит выгорание остатков водорода в веществе звезды. Однако М. Шварцшильд считает такую гипотезу малоправдоподобной. Гравитационное сжатие возможно только на ранних стадиях эволюции белых карликов, когда состояние электронной компоненты звездного вещества еще не достигло полного вырождения, поскольку при достижении последнего имеется, как мы видели, однозначное соответствие между массой и радиусом конфигурации.

Не может также быть источником энергии и теплота электронного газа, так как в случае статистики Ферми — Дирака все состояния с малой энергией уже замещены, а их дополнительное заселение противоречит запрету Паули.

Единственным источником энергии может, вероятно, служить только тепловое движение атомных ядер, составляющих обычный идеальный газ, далекий от состояния вырождения. Этот источник способен поддерживать излучение белых карликов в течение весьма больших промежутков времени. Шварцшильд вычисляет время, прошедшее после прекращения термоядерной генерации энергии до современного состояния белого карлика. Принимая указанный химический состав и полагая $M = M_\odot$, он приходит к выводу, что для звезд со светимостями 10^{-2}, 10^{-3} и 10^{-4} $L_\odot$ это время составляет $0{,}3 \cdot 10^9$, $1{,}6 \cdot 10^9$ и $8 \cdot 10^9$ лет соответственно.

8. Сверхплотные звездные конфигурации. Можно думать, что теория Чандрасекара, основанная на законе тяготения Ньютона и на уравнении состояния идеального газа Ферми, в общем хорошо описывает особенности строения звезд типа белых карликов. Однако