Глава VIII. КОСМОЛОГИЯ

1. Космологические парадоксы. Важной областью применения теории гравитации является космология, т. е. учение о наиболее общих законах строения и эволюции космоса. Космология имеет целью обобщить результаты изучения конкретных космических тел и их систем и представить эти результаты в виде картины мира в целом, позволяющей с единой точки зрения объяснить наиболее существенные особенности наблюдаемой части Вселенной.

Объектом современной космологии является Метагалактика, состоящая из галактик и их систем. Вследствие ограниченности наблюдательных данных, а также ввиду возможной непригодности существующего теоретического аппарата, проблема строения и развития Метагалактики еще не имеет ясного и убедительного решения. Поскольку до сих пор наблюдению доступна, по-видимому, только относительно малая часть Метагалактики, может оказаться, что имеющиеся в настоящее время сведения недостаточны для характеристики этой космической системы в целом. Можно также предположить, что в Метагалактике в целом гравитация частично или даже полностью утрачивает значение и что в этой системе господствуют взаимодействия еще неизвестной нам природы.

Предлагавшиеся решения космологической проблемы являются лишь примерными и имеют в значительной степени умозрительный характер. Наиболее разработанные и интересные решения принадлежат релятивистской космологии, основанной на уравнениях поля общей теории относительности.

Прежде чем перейти к краткому описанию релятивистской космологии, мы остановимся на так называемых космологических парадоксах, которые возникали при экстраполяции законов классической физики на бесконечную Вселенную и обсуждение которых играло существенную роль в развитии современных космологических представлений.

В 1744 г. Шезо указал, что если бы бесконечная Вселенная была равномерно заполнена звездами, то при прозрачности мирового пространства все небо имело бы очень большую яркость. Впоследствии это заключение обсуждалось Ольберсом [1], вслед-

ствие чего оно и получило название оптического парадокса Ольберса.

Пусть в данном направлении от наблюдателя звезды распределены в пространстве с объемной плотностью D, которая может зависеть от расстояния r. Каждая из звезд, которые для простоты мы предположим одинаковыми, видна из точки наблюдения под телесным углом $\frac{\sigma}{r^2}$, где σ — сечение звезды. Все звезды, расположенные внутри этого телесного угла на бо́льших расстояниях, экранируются данной звездой и недоступны наблюдению.

Наряду с указанной истинной плотностью можно ввести видимую звездную плотность D', понимая под этой величиной число звезд, находящихся в единице объема и не экранируемых от наблюдателя другими звездами. Найдем связь между истинной и видимой плотностями.

Предположим, что наблюдение ведется в пределах некоторого телесного угла $\Delta\omega$, вершина которого совпадает с точкой наблюдения, а ось имеет выбранное направление в пространстве. Число видимых звезд в объеме, вырезанном из этого телесного угла сферами с радиусами ρ и $\rho + d\rho$, составляет $\rho^2 D' \Delta\omega d\rho$, а образованный ими суммарный телесный угол равен $\sigma D' \Delta\omega d\rho$, поскольку каждая из них видна из точки наблюдения под углом $\frac{\sigma}{\rho^2}$. Все видимые звезды с расстояниями не более r образуют суммарный телесный угол $\sigma\Delta\omega \int\limits_{r_0}^{r} D' d\rho$ и на сфере радиуса r экранируют площадку $\sigma r^2 \Delta\omega \int\limits_{r_0}^{r} D' d\rho$. Через r_0 здесь обозначено расстояние до ближайшей звезды, соответствующее звездной плотности в месте наблюдения.

Рассмотрим элементарный цилиндр, образованный сечениями сфер с радиусами r и $r + dr$. В нем содержится $r^2 D \Delta\omega dr$ звезд. Часть этого цилиндра, экранированная от наблюдателя более близкими звездами, имеет объем $\sigma r^2 \Delta\omega dr \int\limits_{r_0}^{r} D' d\rho$ и содержит $\sigma r^2 D \Delta\omega dr \int\limits_{r_0}^{r} D' d\rho$ звезд. В остальной части цилиндра находятся звезды, доступные наблюдению; их число равно $r^2 D' \Delta\omega dr$. Следовательно,

$$r^2 D \Delta\omega dr - \sigma r^2 D \Delta\omega dr \int\limits_{r_0}^{r} D' d\rho = r^2 D' \Delta\omega dr.$$

Таким образом, истинная и видимая звездные плотности связаны соотношением

$$D - \sigma D \int_{r_0}^{r} D' d\rho = D',$$

из которого следует дифференциальное уравнение

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{D'}{D}\right) + \sigma D' = 0,$$

имеющее очевидное решение

$$D' = De^{-\sigma \int_{r_0}^{r} D dr}. \qquad (8,1,1)$$

Если все пространство заполнено звездами с конечной плотностью, то интеграл $\int_{r_0}^{\infty} D' dr$ расходится, видимая плотность D' стремится к нулю, показывая, что экранирование является полным и яркость неба равна яркости звезды. В этом и состоит космологический парадокс Ольберса.

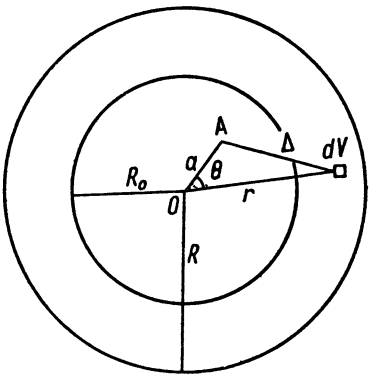

Рис. 30.

Гравитационный парадокс Зеелигера [2] возник при попытке распространить закон тяготения Ньютона на бесконечное пространство, наполненное массами с конечной плотностью. Проследим в общих чертах обычные рассуждения, приводящие к этому парадоксу.

Рассмотрим поле тяготения масс, распределенных с плотностью ρ между двумя сферами радиусов R_0 и R с общим центром в точке 0 (рис. 30). Потенциал поля в точке A, лежащей на расстоянии a от центра сферы, равен

$$\varphi = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_{R_0}^{R} \gamma \rho r^2 \Delta^{-1} \sin\theta d\varphi d\theta dr,$$

где r — расстояние от центра до элемента объема $dV = r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr$, Δ — расстояние точки A от того же элемента объема, заданное очевидной формулой

$$\Delta^{-1} = r^{-1}\left(1 + \frac{a^2}{r^2} - \frac{2a}{r}\cos\theta\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Составим производную потенциала по переменной a и положим затем $a = 0$. При $R_0 = 0$ получим

$$\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \gamma\rho r \sin\theta d\varphi d\theta dr;$$
$$\frac{d\varphi}{da} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \gamma\rho \sin\theta \cos\theta d\varphi d\theta dr. \qquad (8,1,2)$$

Применяя эти формулы к бесконечному пространству, следует положить $R \to \infty$. Если при этом допустить $\rho = \text{const}$, что для Вселенной в целом наиболее естественно, то потенциал будет бесконечно большим, а его производная, определяющая ускорение тела под действием космических масс, окажется неопределенной.

Зеелигер причиной гравитационного парадокса считал неточность закона тяготения. Поскольку последний выведен из наблюдений, можно предположить, что формула обратных квадратов является приближенной, имеет ограниченное значение и при переходе к очень большим областям пространства должна быть заменена более точной. Допустим, например, что точная формула закона тяготения отвечает потенциалу $\sim \frac{1}{r} e^{-\lambda r}$, где λ — достаточно малая постоянная, которая при не очень больших расстояниях обеспечивает переход к обычному ньютонову потенциалу.

В этом случае вместо (8,1,2) имеем формулы

$$\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \gamma\rho r e^{-\lambda r} \sin\theta d\varphi d\theta dr;$$
$$\frac{d\varphi}{da} = \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R} \gamma\rho e^{-\lambda r} \sin\theta \cos\theta d\varphi d\theta dr, \qquad (8,1,3)$$

которые при $\rho = \text{const}$ и $R = \infty$ дают $\varphi = \frac{4\pi\gamma\rho}{\lambda^2}$, $\frac{d\varphi}{da} = 0$, устраняя гравитационный парадокс.

Особенно простая и удобная формулировка космологического парадокса Зеелигера основана на уравнении Пуассона. Точной формуле закона обратных квадратов соответствует известное уравнение $\nabla^2\varphi = -4\pi\gamma\rho$. При $\rho \neq 0$ оно не имеет решения $\varphi = \text{const}$, показывая, что с точки зрения закона тяготения Ньютона гипотеза об однородной стационарной Вселенной несовместима с представлением о бесконечном пространстве, заполненном космическими массами с конечной плотностью. Противоречие можно устранить, если уравнение для гравитационного потенциала написать в виде $\nabla^2\varphi - \lambda^2\varphi = -4\pi\gamma\rho$, где λ — малая постоянная.

При $\rho = \text{const}$ это уравнение допускает решение $\varphi = \frac{2\pi\gamma\rho}{\lambda^2}$.

2. Вселенная Ламберта — Шарлье. Космологические парадоксы можно разрешить и при сохранении точной формулы законов классической физики, если отказаться от гипотезы об однородности стационарной Вселенной и приписать последней некоторую структуру.

Следуя идее об иерархичности в строении Вселенной, высказанной еще в XVIII ст. Ламбертом и более точно сформулированной в прошлом веке Проктором [3], Шарлье предложил возможную схему строения Вселенной, бесконечной в пространственном и материальном отношениях, но свободной от оптического и гравитационного парадоксов [4].

Согласно Шарлье, Вселенная представляет собой неограниченную последовательность космических систем, построенных иерархически. Пусть система первого порядка, которую для простоты мы будем считать сферической, имеет радиус R_1 и содержит N_1 звезд. N_2 таких систем образуют систему второго порядка радиуса R_2. В свою очередь, N_3 систем второго порядка составляют систему третьего порядка радиуса R_3 и т. д. Вселенная, отвечающая такой схеме, бесконечна в пространстве и обладает бесконечно большой массой, так как масса i-й системы

$$M_i = N_i N_{i-1} \ldots N_1 M_0,$$

где M_0 — масса звезды, при достаточно высоком порядке будет сколь угодно большой.

Найдем условие, при котором Вселенная Шарлье свободна от гравитационного и оптического парадоксов.

Каждая звезда, являясь членом определенной космической системы первого порядка, входит вместе с последней в состав систем второго, третьего и более высоких порядков. Поэтому полное ускорение звезды равно сумме ускорений, сообщаемых ей гравитационными полями всех систем космической иерархии.

Пусть рассматриваемая звезда находится на расстоянии a_i от центра системы i-го порядка. Средняя плотность этой системы

$$\rho_i = \frac{3N_i N_{i-1} \ldots N_1 M_0}{4\pi R_i^3}. \qquad (8,2,1)$$

Ускорение, сообщаемое данной звезде полем тяготения системы в направлении центра последней, можно определить по формуле $w_i = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_i a_i$. Поэтому полное ускорение звезды удовлетворяет соотношению $w \leqslant \frac{4}{3}\pi\gamma\Sigma\rho_i a_i$, или

$$w \leqslant \frac{4}{3}\pi\gamma\sum\rho_i R_i, \qquad (8,2,2)$$