При $\rho = \text{const}$ это уравнение допускает решение $\varphi = \frac{2\pi\gamma\rho}{\lambda^2}$.

2. Вселенная Ламберта — Шарлье. Космологические парадоксы можно разрешить и при сохранении точной формулы законов классической физики, если отказаться от гипотезы об однородности стационарной Вселенной и приписать последней некоторую структуру.

Следуя идее об иерархичности в строении Вселенной, высказанной еще в XVIII ст. Ламбертом и более точно сформулированной в прошлом веке Проктором [3], Шарлье предложил возможную схему строения Вселенной, бесконечной в пространственном и материальном отношениях, но свободной от оптического и гравитационного парадоксов [4].

Согласно Шарлье, Вселенная представляет собой неограниченную последовательность космических систем, построенных иерархически. Пусть система первого порядка, которую для простоты мы будем считать сферической, имеет радиус R_1 и содержит N_1 звезд. N_2 таких систем образуют систему второго порядка радиуса R_2. В свою очередь, N_3 систем второго порядка составляют систему третьего порядка радиуса R_3 и т. д. Вселенная, отвечающая такой схеме, бесконечна в пространстве и обладает бесконечно большой массой, так как масса i-й системы

$$M_i = N_i N_{i-1} \ldots N_1 M_0,$$

где M_0 — масса звезды, при достаточно высоком порядке будет сколь угодно большой.

Найдем условие, при котором Вселенная Шарлье свободна от гравитационного и оптического парадоксов.

Каждая звезда, являясь членом определенной космической системы первого порядка, входит вместе с последней в состав систем второго, третьего и более высоких порядков. Поэтому полное ускорение звезды равно сумме ускорений, сообщаемых ей гравитационными полями всех систем космической иерархии.

Пусть рассматриваемая звезда находится на расстоянии a_i от центра системы i-го порядка. Средняя плотность этой системы

$$\rho_i = \frac{3N_i N_{i-1} \ldots N_1 M_0}{4\pi R_i^3}. \qquad (8,2,1)$$

Ускорение, сообщаемое данной звезде полем тяготения системы в направлении центра последней, можно определить по формуле $w_i = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho_i a_i$. Поэтому полное ускорение звезды удовлетворяет соотношению $w \leqslant \frac{4}{3}\pi\gamma\Sigma\rho_i a_i$, или

$$w \leqslant \frac{4}{3}\pi\gamma\sum\rho_i R_i, \qquad (8,2,2)$$

поскольку величины a_i не могут быть больше радиусов соответствующих космических систем.

Для сходимости суммы (8,2,2) необходимо, чтобы каждый ее член был меньше предыдущего, т. е. чтобы выполнялось соотношение $\rho_i R_i < \rho_{i-1} R_{i-1}$. Внося сюда (8,2,1), получим

$$\frac{R_i}{R_{i-1}} > \sqrt{N_i}. \qquad (8,2,3)$$

Это неравенство имеет в теории Шарлье фундаментальное значение. Отвечающая ему космологическая модель свободна от гравитационного парадокса Зеелигера: звезды обладают в ней конечными ускорениями, хотя потенциал общего поля тяготения может быть неопределенно большим.

Рассмотрим вопрос о парадоксе Ольберса во Вселенной Ламберта — Шарлье. С этой целью воспользуемся соотношением (8,1,1), связывающим видимую звездную плотность с истинной. Полное экранирование неба звездами наступает в том случае, если при $r \to \infty$ видимая плотность исчезнет, т. е. если интеграл $\int\limits_{r_0}^{\infty} D dr$ расходится.

Луч зрения, проведенный от наблюдателя в каком-либо направлении, пересекает космические системы различных порядков. Пусть отрезок его внутри системы i-го порядка имеет длину b_i. Средняя звездная плотность в этой системе

$$D_i = \frac{3N_i N_{i-1} \ldots N_1}{4\pi R_i^3}.$$

Поэтому соответствующий элемент интеграла можно заменить выражением

$$\frac{3}{4\pi} N_i \ldots N_1 b_i R_i^{-3},$$

а интеграл представить в виде суммы

$$\frac{3}{4\pi} \sum N_i \ldots N_1 b_i R_i^{-3}.$$

Поскольку $b_i \leqslant 2R_i$, имеем

$$\int\limits_{r_0}^{\infty} D dr < \frac{3}{2\pi} \sum N_i \ldots N_1 R_i^{-2}. \qquad (8,2,4)$$

Отношение i-го члена суммы (8,2,4) к предыдущему равно $N_i R_{i-1}^2 R_i^{-2}$ и, согласно (8,2,3), составляет величину меньше единицы. Таким образом, общее условие Вселенной Ламберта — Шарлье обеспечивает сходимость суммы (8,2,4), а следовательно, и интеграла в соотношении между видимой и истинной звездными

плотностями. Видимая плотность отлична от нуля на всех расстояниях от наблюдателя, и потому космологическая модель Шарлье свободна от оптического парадокса Ольберса.

3. Гравитационный парадокс и общая теория относительности. Гравитационный парадокс Зеелигера выражает несовместимость точной формы закона тяготения Ньютона с концепцией однородной статической Вселенной. С точки зрения классической механики, устранение парадокса достигается ценой отказа от точной формы закона Ньютона или путем постулирования некоторого неоднородного распределения космических масс, например такого, какой принят в иерархической вселенной Ламберта — Шарлье. Естественно спросить, можно ли согласовать идею однородной статической Вселенной с уравнением поля ОТО.

В однородной космологической модели все пространственные точки и все направления равноправны, поэтому линейный элемент независим от начала пространственных координат и должен удовлетворять условию сферической симметрии. В ОТО такой элемент имеет вид

$$ds^2 = -e^{\alpha}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + e^{\beta}dt^2, \qquad (8,3,1)$$

где α, β — функции одного r.

С математической точки зрения, поставленный вопрос сводится к задаче: допускают ли уравнения поля Эйнштейна

$$R_{ij} = -8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right) \qquad (8,3,2)$$

решение в форме (8,3,1), если принять, что масса распределена с постоянными плотностью и давлением.

Представим уравнения поля в развернутой форме.

В случае пространственно-временного элемента (8,3,1) диагональные компоненты тензора Риччи определяются формулами (см. главу V)

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r};\\
R_{22} &= e^{-\alpha}\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - 1;\\
R_{33} &= e^{-\alpha}\sin^2\theta\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - \sin^2\theta;\\
R_{44} &= e^{\beta-\alpha}\left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r}\right),
\end{aligned} \qquad (8,3,3)$$

тогда как остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.