плотностями. Видимая плотность отлична от нуля на всех расстояниях от наблюдателя, и потому космологическая модель Шарлье свободна от оптического парадокса Ольберса.

3. Гравитационный парадокс и общая теория относительности. Гравитационный парадокс Зеелигера выражает несовместимость точной формы закона тяготения Ньютона с концепцией однородной статической Вселенной. С точки зрения классической механики, устранение парадокса достигается ценой отказа от точной формы закона Ньютона или путем постулирования некоторого неоднородного распределения космических масс, например такого, какой принят в иерархической вселенной Ламберта — Шарлье. Естественно спросить, можно ли согласовать идею однородной статической Вселенной с уравнением поля ОТО.

В однородной космологической модели все пространственные точки и все направления равноправны, поэтому линейный элемент независим от начала пространственных координат и должен удовлетворять условию сферической симметрии. В ОТО такой элемент имеет вид

$$ds^2 = -e^{\alpha}dr^2 - r^2d\theta^2 - r^2\sin^2\theta d\varphi^2 + e^{\beta}dt^2, \qquad (8,3,1)$$

где α, β — функции одного r.

С математической точки зрения, поставленный вопрос сводится к задаче: допускают ли уравнения поля Эйнштейна

$$R_{ij} = -8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2}g_{ij}T\right) \qquad (8,3,2)$$

решение в форме (8,3,1), если принять, что масса распределена с постоянными плотностью и давлением.

Представим уравнения поля в развернутой форме.

В случае пространственно-временного элемента (8,3,1) диагональные компоненты тензора Риччи определяются формулами (см. главу V)

$$\begin{aligned}
R_{11} &= \frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r};\\
R_{22} &= e^{-\alpha}\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - 1;\\
R_{33} &= e^{-\alpha}\sin^2\theta\left[1 + \frac{r}{2}(\beta' - \alpha')\right] - \sin^2\theta;\\
R_{44} &= e^{\beta-\alpha}\left(-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r}\right),
\end{aligned} \qquad (8,3,3)$$

тогда как остальные компоненты этого тензора тождественно исчезают.

Тензор энергии-импульса находится по общей формуле

$$T^{ij} = (\rho + p)\frac{dx^i}{ds}\frac{dx^j}{ds} - g^{ij}p.$$

Согласно условию статичности, следует считать, что макроскопических движений в веществе нет, вследствие чего из четырех компонент вектора $\frac{dx^\sigma}{ds}$ отличается от нуля лишь последняя, удовлетворяющая соотношению $e^\beta\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 = 1$. Поэтому ковариантные компоненты тензора энергии-импульса, отвечающие линейному элементу (8,3,1), а также скаляр этого тензора определяются формулами

$$T_{11} = pe^\alpha;\ T_{22} = pr^2;\ T_{33} = pr^2\sin^2\theta;\ T_{44} = \rho e^\beta;$$
$$T = \rho - 3p;\ T_{ij} = 0;\ i \neq j. \qquad (8,3,4)$$

С помощью (8,3,3) и (8,3,4) уравнения поля приводятся к системе трех дифференциальных уравнений относительно функций α, β

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = -4\pi e^\alpha(\rho - p);$$
$$\frac{1}{r^2} + \frac{1}{2r}(\beta' - \alpha') - \frac{e^\alpha}{r^2} = -4\pi e^\alpha(\rho - p); \qquad (8,3,5)$$
$$-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} = -4\pi e^\alpha(\rho + 3p).$$

В эту систему входят лишь две искомые функции, поэтому можно ожидать, что при произвольно заданных ρ и p она не имеет решения. Найдем условие совместимости уравнений (8,3,5).

Сложив первое уравнение с третьим, получим

$$\alpha' + \beta' = 8\pi r e^\alpha(\rho + p). \qquad (8,3,6)$$

Это равенство вместе со вторым уравнением (8,3,5) дает

$$\beta' = -\frac{1}{r} + \frac{e^\alpha}{r} + 8\pi r p e^\alpha.$$

Дифференцируя его и исключив затем давление, найдем

$$\beta'' = \frac{2}{r^2} - \frac{2e^\alpha}{r^2} + \frac{\alpha' + \beta'}{2} + \alpha'\beta'.$$

Если полученное равенство внести в формулу

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = \frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^\alpha}{r^2},$$

которая непосредственно следует из двух первых уравнений

(8,3,5), то после несложных преобразований получится $(\alpha' + \beta')\beta' = 0$ или, согласно (8,3,6),

$$(\rho + p)\beta' = 0. \qquad (8,3,7)$$

Нетрудно убедиться в том, что это равенство является не только необходимым, но и достаточным условием совместимости уравнений поля (8,3,5).

При $\rho = p = 0$ система (8,3,5) переходит в уравнения поля для пустого пространства и приводит к внешнему решению Шварцшильда, рассмотренному в главе V. Поскольку в нашем случае это решение не представляет интереса, остается положить $\beta' = 0$. Однако при этом последнее уравнение системы (8,3,5) дает $\rho + 3p = 0$, т. е. также $\rho = p = 0$. Таким образом, уравнения поля не допускают решения при постоянных положительных ρ и p; как и закон тяготения Ньютона, уравнения поля ОТО не совместимы с концепцией однородной статической Вселенной.

4. Космологические модели Эйнштейна и де Ситтера. Космологический парадокс классической теории тяготения можно устранить путем введения поправки в закон обратных квадратов Ньютона. Подобным же образом ОТО можно примирить с концепцией однородной статической Вселенной с помощью соответствующей переделки уравнений поля Эйнштейна.

Как упоминалось в главе V, такую переделку предложил Эйнштейн в 1917 г. [5]. Уравнения поля, дополненные «космологическим членом», имеют вид

$$R_{ij} = -8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right) + \Lambda g_{ij}, \qquad (8,4,1)$$

где Λ — достаточно малая постоянная, значение которой должно быть определено путем сравнения космологической модели с данными астрономических наблюдений.

Как и прежде, пространственно-временной интервал принимается в форме (8,3,1), а тензор энергии-импульса — согласно соотношениям (8,3,4).

Воспользовавшись выражением для компонент тензора Риччи (8,3,3), легко представить уравнения поля (8,4,1) в развернутой форме; они приводятся к трем дифференциальным уравнениям

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = -4\pi e^{\alpha}(\rho - p) - \Lambda e^{\alpha};$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^{\alpha}}{r^2} = -4\pi e^{\alpha}(\rho - p) - \Lambda e^{\alpha};$$

$$-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} = -4\pi e^{\alpha}(\rho + 3p) + \Lambda e^{\alpha}, \qquad (8,4,2)$$