(8,3,5), то после несложных преобразований получится $(\alpha' + \beta')\beta' = 0$ или, согласно (8,3,6),

$$(\rho + p)\beta' = 0. \qquad (8,3,7)$$

Нетрудно убедиться в том, что это равенство является не только необходимым, но и достаточным условием совместимости уравнений поля (8,3,5).

При $\rho = p = 0$ система (8,3,5) переходит в уравнения поля для пустого пространства и приводит к внешнему решению Шварцшильда, рассмотренному в главе V. Поскольку в нашем случае это решение не представляет интереса, остается положить $\beta' = 0$. Однако при этом последнее уравнение системы (8,3,5) дает $\rho + 3p = 0$, т. е. также $\rho = p = 0$. Таким образом, уравнения поля не допускают решения при постоянных положительных ρ и p; как и закон тяготения Ньютона, уравнения поля ОТО не совместимы с концепцией однородной статической Вселенной.

4. Космологические модели Эйнштейна и де Ситтера. Космологический парадокс классической теории тяготения можно устранить путем введения поправки в закон обратных квадратов Ньютона. Подобным же образом ОТО можно примирить с концепцией однородной статической Вселенной с помощью соответствующей переделки уравнений поля Эйнштейна.

Как упоминалось в главе V, такую переделку предложил Эйнштейн в 1917 г. [5]. Уравнения поля, дополненные «космологическим членом», имеют вид

$$R_{ij} = -8\pi\left(T_{ij} - \frac{1}{2} g_{ij} T\right) + \Lambda g_{ij}, \qquad (8,4,1)$$

где Λ — достаточно малая постоянная, значение которой должно быть определено путем сравнения космологической модели с данными астрономических наблюдений.

Как и прежде, пространственно-временной интервал принимается в форме (8,3,1), а тензор энергии-импульса — согласно соотношениям (8,3,4).

Воспользовавшись выражением для компонент тензора Риччи (8,3,3), легко представить уравнения поля (8,4,1) в развернутой форме; они приводятся к трем дифференциальным уравнениям

$$\frac{\beta''}{2} - \frac{\alpha'\beta'}{4} + \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\alpha'}{r} = -4\pi e^{\alpha}(\rho - p) - \Lambda e^{\alpha};$$

$$\frac{1}{r^2} + \frac{\beta' - \alpha'}{2r} - \frac{e^{\alpha}}{r^2} = -4\pi e^{\alpha}(\rho - p) - \Lambda e^{\alpha};$$

$$-\frac{\beta''}{2} + \frac{\alpha'\beta'}{4} - \frac{\beta'^2}{4} - \frac{\beta'}{r} = -4\pi e^{\alpha}(\rho + 3p) + \Lambda e^{\alpha}, \qquad (8,4,2)$$

которые отличаются от системы (8,3,5) только членами с космологической постоянной.

Повторим вычисления, выполненные в 3.

Легко убедиться в том, что соотношение (8,3,6) и выражение для второй производной функции β сохраняют прежнюю форму. Поэтому, комбинируя первое и второе уравнения (8,4,2) и производя соответствующие подстановки, найдем, что и в данном случае условие совместимости трех уравнений (8,4,2) имеет вид (8,3,7).

Пусть $\beta' = 0$ при ρ и p, отличных от нуля. Последнее уравнение рассматриваемой системы определяет связь между космологической постоянной, давлением и плотностью вещества.

$$\Lambda = 4\pi(\rho + 3p). \tag{8,4,3}$$

Два первых уравнения имеют решение

$$e^{-\alpha} = 1 - 4\pi r^2(\rho + p).$$

Если ввести обозначение*

$$R^{-2} = \Lambda - 8\pi p = 4\pi(\rho + p), \tag{8,4,4}$$

то решение примет вид

$$e^{\alpha} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}.$$

Положив $\beta = 0$**, получим полное решение уравнений поля, определяющее космологическую модель Эйнштейна [5] и соответствующее линейному элементу

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + dt^2. \tag{8,4,5}$$

При $\beta' \neq 0$, $\rho = p = 0$ система уравнений (8,4,2) имеет решение

$$e^{\alpha} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}; \; e^{\beta} = 1 - \frac{r^2}{R^2}; \; R^2 = 3\Lambda^{-1},$$

которому отвечает космологическая модель де Ситтера [6] с линейным элементом

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr^2 - r^2 d\theta^2 - r^2 \sin^2\theta d\varphi^2 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right) dt^2. \tag{8,4,6}$$

---

* В соответствии с традицией, здесь и в дальнейшем через R обозначен радиус кривизны пространства. Во избежание недоразумений следует помнить, что обозначение тензора Риччи оставлено прежним.

** Численное значение постоянной β можно выбрать произвольно, поскольку оно определяется масштабом временной координаты.

Случай $\beta' = 0$, $\rho = p = 0$ не представляет космологического интереса, поскольку при этом получается $\Lambda = 0$, α, $\beta = \mathrm{const}$, что соответствует континууму Минковского СТО.

Итак, дополнение уравнений поля Эйнштейна космологическим членом позволяет согласовать ОТО с представлением об однородной статической Вселенной. Из возникающих при этом двух космологических моделей, с общей точки зрения, следует отдать предпочтение первой, так как модель де Ситтера основана на принципиально неприемлемом допущении об отсутствии космических масс с объемной плотностью.

В модели Эйнштейна пространство имеет форму трехмерной сферы радиуса R, тогда как четырехмерный пространственно-временной континуум представляет собой цилиндр с неискривленной осью времени. Объем пространства конечен и равен

$$V = 2\int_0^{2\pi}\int_0^{\pi}\int_0^{R}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}} r^2 \sin\theta d\varphi d\theta dr = 2\pi^2 R^3. \qquad (8,4,7)$$

Если положить $p = 0$, то объем и радиус кривизны пространства определяется величиной космологической постоянной

$$V = 2\pi^2 \Lambda^{-\frac{3}{2}}; \; R = \Lambda^{-\frac{1}{2}}, \qquad (8,4,8)$$

которая, в свою очередь, зависит от плотности вещества

$$\Lambda = 4\pi\rho. \qquad (8,4,9)$$

Полная масса

$$M = \frac{1}{2}\pi\Lambda^{-\frac{1}{2}}. \qquad (8,4,10)$$

Таким образом, для определения количественных характеристик модели Эйнштейна необходимо знать плотность вещества в однородной Вселенной. Эту величину отождествляют со средней плотностью в наблюдаемой части Метагалактики, которая, по современным оценкам, составляет 10^{-31} *г/см*$^{-3}$. Воспользовавшись этим значением, легко найти характеристики модели в обычных единицах

$$\Lambda = 9 \cdot 10^{-59}\ \textit{см}^{-2};\ R = 10^{29}\ \textit{см};\ M = 2 \cdot 10^{57}\ \textit{г} = 10^{24} M_{\odot}.$$

Отметим еще интересную особенность общего поля тяготения модели Эйнштейна.

Пусть какое-либо тело в данный момент времени покоится относительно окружающих космических масс. Согласно уравнениям геодезической линии,

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} + \left(\Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^4_{\alpha\beta}\frac{dx^\sigma}{dt}\right)\frac{dx^\alpha}{dt}\frac{dx^\beta}{dt} = 0; \qquad \sigma = 1, 2, 3;$$

ускорение тела в этот момент имеет составляющие

$$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma^\sigma_{44}.$$

Символы Кристофеля в случае статической метрики (8,4,5) приводятся к величинам $-\frac{1}{2}g^{\sigma\sigma}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^\sigma}$ и исчезают. Следовательно, $\frac{d^2x^\sigma}{dt^2}=0$. Это показывает, что общее гравитационное поле модели не может привести покоящееся тело в движение.

Переходим к краткому описанию **космологической модели де Ситтера**. Согласно линейному элементу (8,4,6), пространственно-временной континуум модели представляет собой четырехмерную сферу, радиус которой определяется космологической постоянной. По форме трехмерного пространства модель де Ситтера не отличается от модели Эйнштейна: как и в последней, пространство сферическое и имеет конечный объем. Различие в метрике моделей относится к измерению времени.

Характерная особенность модели де Ситтера состоит в отсутствии массы с объемной плотностью. Следует, однако, иметь в виду, что «мир де Ситтера» не является совершенно пустым, поскольку его метрика удовлетворяет уравнениям поля для пустоты лишь при $r < R$. При $r = R$ уравнения нарушаются, показывая, что в модели существует сферическая поверхность, на которой тензор энергии-импульса не равен нулю.

В отличие от модели Эйнштейна, общее поле тяготения модели де Ситтера вызывает ускорение покоящихся тел. Действительно, ускорение неподвижной частицы определяется, как указывалось, формулой $\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma^\sigma_{44}$. Символы Кристофеля Γ^σ_{44} при $\sigma = 2,3$ исчезают. При $\sigma = 1$ имеем $\Gamma^1_{44} = -\frac{1}{2g_{11}}\frac{\partial g_{44}}{\partial x^1}$. Поэтому неподвижное тело обладает радиальным ускорением

$$\frac{d^2r}{dt^2} = \frac{r}{R^2}\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),$$

которое равно нулю лишь в начале координат и на сфере $r = R$. Это показывает, что в модели де Ситтера общее гравитационное поле вызывает рассеяние небесных тел.

Отметим интересную оптическую особенность этой модели. Положив в линейном элементе (8,4,6) $d\theta = d\varphi = 0$ и $ds = 0$, получим уравнение

$$\frac{dr}{dt} = \pm\left(1-\frac{r^2}{R^2}\right),$$

интегрирование которого показывает, что для распространения света между сферой $r = R$ и какой-либо точкой $r < R$ необходим бесконечно большой промежуток времени. Световой сигнал о событии, которое произошло на сфере, недоступен для наблюдателя внутри нее.

Рассмотрим еще эффект Допплера в модели де Ситтера.

Пусть источник света, имеющий радиальную скорость, излучает в момент t_1 световой импульс длины волны λ. Найдем длину волны $\lambda + \delta\lambda$, измеренную в момент t_2 наблюдателем, находящимся в начале координат.

Согласно общей формуле (6,7,1), принцип Допплера в данном случае выражается соотношением

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1} : \left(\frac{ds}{dt}\right)_1,$$

в котором индексом 1 отмечена производная, относящаяся к источнику излучения.

Связь между моментами излучения и наблюдения определяется формулой

$$\frac{dr}{dt} = -\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right),$$

которая дает

$$t_2 = t_1 + \int_0^r \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} dr$$

и после дифференцирования приводит к соотношению

$$\frac{dt_2}{dt_1} = 1 + \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \left(\frac{dr}{dt}\right)_1, \qquad (8,4,11)$$

где $\left(\frac{dr}{dt_1}\right)_1$ — скорость источника в момент излучения.

Для вычисления $\left(\frac{ds}{dt}\right)_1$ воспользуемся последним из уравнений геодезической линии

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \Gamma^4_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{ds} \frac{dx^\beta}{ds} = 0,$$

которое в нашем случае принимает вид

$$\frac{d^2t}{ds^2} + \Gamma^4_{44}\left(\frac{dt}{ds}\right)^2 + 2\Gamma^4_{14} \frac{dt}{ds} \frac{dx}{ds} = 0.$$

Для метрики, отвечающей линейному элементу де Ситтера (8,4,6), имеем

$$\Gamma^4_{44} = 0; \; \Gamma^4_{14} = -\frac{r}{R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}.$$

Следовательно,

$$\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{2r}{R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}\frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется и дает

$$\frac{dt}{ds} = h\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}, \qquad (8,4,12)$$

где h — постоянная интегрирования, которая может иметь только положительное значение и зависит от скорости движения источника. Для определения ее нужно воспользоваться линейным элементом (8,4,6), из которого непосредственно получаем

$$h^2 = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_1}.$$

С помощью (8,4,11) и (8,4,12) выражение принципа Допплера приводится к следующему виду:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = h\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} + h\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2}\left(\frac{dr}{dt}\right)_1. \qquad (8,4,13)$$

В частности, если источник излучения неподвижен, наблюдатель должен зарегистрировать красное смещение

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

возрастающее с приближением переменной r к радиусу модели.

Космологическую модель де Ситтера пытались привлечь для объяснения красного смещения в спектрах внегалактических туманностей. Однако эти попытки нельзя признать удачными, поскольку для вывода линейной корреляции между величиной красного смещения и расстоянием в модели де Ситтера приходится принять очень искусственное допущение о пространственно-временном распределении галактик.

5. Решение А. Фридмана. Если исключить линейный элемент Минковского СТО, то для однородной статической Вселенной уравнения поля имеют, как мы видим, только два решения, которым отвечают космологические модели Эйнштейна и де Ситтера. Сохраняя условие однородности, можно получить новые решения уравнений поля лишь при отказе от условия статичности. Впервые нестатическое решение уравнений поля ОТО получил А. Фридман [7], исследования которого были важным этапом в развитии релятивистской космологии.