Следовательно,

$$\frac{d^2t}{ds^2} - \frac{2r}{R^2}\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} \frac{dt}{ds}\frac{dr}{ds} = 0.$$

Это уравнение легко интегрируется и дает

$$\frac{dt}{ds} = h\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1}, \tag{8,4,12}$$

где h — постоянная интегрирования, которая может иметь только положительное значение и зависит от скорости движения источника. Для определения ее нужно воспользоваться линейным элементом (8,4,6), из которого непосредственно получаем

$$h^2 = \frac{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^3}{\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^2 - \left(\frac{dr}{dt}\right)_1}.$$

С помощью (8,4,11) и (8,4,12) выражение принципа Допплера приводится к следующему виду:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = h\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-1} + h\left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-2}\left(\frac{dr}{dt}\right)_1. \tag{8,4,13}$$

В частности, если источник излучения неподвижен, наблюдатель должен зарегистрировать красное смещение

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \left(1 - \frac{r^2}{R^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

возрастающее с приближением переменной r к радиусу модели.

Космологическую модель де Ситтера пытались привлечь для объяснения красного смещения в спектрах внегалактических туманностей. Однако эти попытки нельзя признать удачными, поскольку для вывода линейной корреляции между величиной красного смещения и расстоянием в модели де Ситтера приходится принять очень искусственное допущение о пространственно-временном распределении галактик.

5. Решение А. Фридмана. Если исключить линейный элемент Минковского СТО, то для однородной статической Вселенной уравнения поля имеют, как мы видим, только два решения, которым отвечают космологические модели Эйнштейна и де Ситтера. Сохраняя условие однородности, можно получить новые решения уравнений поля лишь при отказе от условия статичности. Впервые нестатическое решение уравнений поля ОТО получил А. Фридман [7], исследования которого были важным этапом в развитии релятивистской космологии.

Представим линейный элемент (8,4,5) в несколько иной форме, произведя преобразования $r = R\sin\psi$. Выполнив подстановку, получим

$$ds^2 = -R^2(d\psi^2 + \sin^2\psi d\theta^2 + \sin^2\psi\sin^2\theta d\varphi^2) + dt^2. \quad (8,5,1)$$

При $R = \text{const}$ этот линейный элемент соответствует статической модели Эйнштейна, в которой пространство представляет собой трехмерную сферу радиуса R. Отказавшись от условия $R = \text{const}$, будем искать решение уравнений поля в предположении, что R является функцией времени.

Для упрощения последующих выкладок наряду с четырехмерной метрикой (8,5,1) будем рассматривать трехмерную метрику

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \sin^2\psi d\theta^2 + \sin^2\psi\sin^2\theta d\varphi^2, \quad (8,5,2)$$

которая определяет континуум трех измерений единичной кривизны. Согласно общей формуле для пространств постоянной кривизны (см. главу IV, 10), тензор Риччи этого континуума имеет компоненты $\overset{x}{R}_{ij} = -2\gamma_{ij}$, где γ_{ij} — составляющие метрического тензора, равные коэффициентам квадратической формы (8,5,2). Звездочкой условимся отмечать величины, относящиеся к трехмерной метрике, сохранив для четырехмерной обычные обозначения.

Переходим к вычислению компонент тензора Риччи применительно к квадратической форме (8,5,1), в которой радиус сферического пространства считается, как уже сказано, функцией временной координаты.

Пусть i, j, k — индексы, принимающие значения 1, 2, 3. Метрический тензор имеет в рассматриваемом случае ковариантные

$$g_{ij} = -R^2\gamma_{ij};\ g_{i4} = 0;\ g_{44} = 1$$

и контравариантные

$$g^{ij} = -\frac{\gamma^{ij}}{R^2};\ g^{i4} = 0;\ g^{44} = 1$$

компоненты.

Определитель метрического тензора, как нетрудно убедиться, равен $g = -R^6\gamma$, где γ — определитель третьего порядка $|\gamma_{ij}|$.

Из определения символов Кристофеля можно получить соотношения

$$\Gamma^k_{ij} = \overset{x}{\Gamma}{}^k_{ij};\ \Gamma^4_{ij} = R\dot{R}\gamma_{ij};\ \Gamma^k_{i4} = R^{-1}\dot{R}\delta^k_i;\ \Gamma^k_{44} = \Gamma^4_{4k} = \Gamma^4_{44} = 0,$$

при выводе которых следует принять во внимание, что коэффициенты γ_{ij} не зависят от времени.

Внеся написанные выражения символов Кристофеля в общее выражение тензора Риччи, получим после несложных преобразований

$$R_{ij} = \overset{x}{R}_{ij} - (2\dot{R}^2 + R\ddot{R})\gamma_{ij};\ R_{i4} = 0;\ R_{44} = 3R^{-1}\ddot{R}.$$

Составим компоненты тензора энергии-импульса, считая, как и прежде, что макроскопических движений в веществе нет.

Воспользовавшись общим определением тензора энергии-импульса, находим ковариантные компоненты

$$T_{ii} = -pg_{ii};\ T_{i4} = 0;\ T_{44} = \rho$$

и скаляр этого тензора $T = \rho - 3p$.

В дальнейшем для простоты принимаем $p = 0$.

Теперь можно написать уравнения поля в развернутой форме. Учитывая полученные значения тензоров R_{ij} и T_{ij} и соотношение $\overset{x}{R}_{ij} = -2\gamma_{ij}$, легко убедиться в том, что уравнения поля сводятся к двум дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} - \Lambda R^2 - 4\pi\rho R^2 + 2 = 0; \\ 3R^{-1}\ddot{R} + 4\pi\rho - \Lambda = 0, \end{gathered} \qquad (8,5,3)$$

содержащим две искомые функции времени.

Систему (8,5,3) можно привести к одному уравнению относительно радиуса. Исключая $\ddot{R}$, получим

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1, \qquad (8,5,4)$$

Дифференцируя это уравнение по времени и сравнивая затем со вторым соотношением (8,5,3), найдем после простых преобразований $\dot{\rho}R + 3\rho\dot{R} = 0$, откуда непосредственно следует

$$\rho = \alpha R^{-3}, \qquad (8,5,5)$$

где α — постоянная интегрирования.

Плотность вещества в рассматриваемой нестатической модели изменяется обратно пропорционально кубу радиуса пространства. Используя эту зависимость, уравнение (8,5,4) можно переписать в виде

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\alpha R^{-1} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1. \qquad (8,5,6)$$

Таким образом, при соблюдении условия однородности уравнения поля ОТО допускают нестатическое решение, в котором ось времени остается, как и в модели Эйнштейна, неискривленной, а пространство представляет собой трехмерную сферу с переменным радиусом, удовлетворяющим дифференциальному уравнению (8,5,6).

6. Расширяющаяся вселенная Леметра. Воспользовавшись решением Фридмана, Леметр построил и изучил космологическую