Внеся написанные выражения символов Кристофеля в общее выражение тензора Риччи, получим после несложных преобразований

$$R_{ij} = \overset{x}{R}_{ij} - (2\dot{R}^2 + R\ddot{R})\gamma_{ij};\ R_{i4} = 0;\ R_{44} = 3R^{-1}\ddot{R}.$$

Составим компоненты тензора энергии-импульса, считая, как и прежде, что макроскопических движений в веществе нет.

Воспользовавшись общим определением тензора энергии-импульса, находим ковариантные компоненты

$$T_{ii} = -pg_{ii};\ T_{i4} = 0;\ T_{44} = \rho$$

и скаляр этого тензора $T = \rho - 3p$.

В дальнейшем для простоты принимаем $p = 0$.

Теперь можно написать уравнения поля в развернутой форме. Учитывая полученные значения тензоров R_{ij} и T_{ij} и соотношение $\overset{x}{R}_{ij} = -2\gamma_{ij}$, легко убедиться в том, что уравнения поля сводятся к двум дифференциальным уравнениям

$$\begin{gathered} 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} - \Lambda R^2 - 4\pi\rho R^2 + 2 = 0; \\ 3R^{-1}\ddot{R} + 4\pi\rho - \Lambda = 0, \end{gathered} \tag{8,5,3}$$

содержащим две искомые функции времени.

Систему (8,5,3) можно привести к одному уравнению относительно радиуса. Исключая $\ddot{R}$, получим

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\rho R^2 + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1. \tag{8,5,4}$$

Дифференцируя это уравнение по времени и сравнивая затем со вторым соотношением (8,5,3), найдем после простых преобразований $\dot{\rho}R + 3\rho\dot{R} = 0$, откуда непосредственно следует

$$\rho = \alpha R^{-3}, \tag{8,5,5}$$

где α — постоянная интегрирования.

Плотность вещества в рассматриваемой нестатической модели изменяется обратно пропорционально кубу радиуса пространства. Используя эту зависимость, уравнение (8,5,4) можно переписать в виде

$$\dot{R}^2 = \frac{8\pi}{3}\alpha R^{-1} + \frac{1}{3}\Lambda R^2 - 1. \tag{8,5,6}$$

Таким образом, при соблюдении условия однородности уравнения поля ОТО допускают нестатическое решение, в котором ось времени остается, как и в модели Эйнштейна, неискривленной, а пространство представляет собой трехмерную сферу с переменным радиусом, удовлетворяющим дифференциальному уравнению (8,5,6).

6. Расширяющаяся вселенная Леметра. Воспользовавшись решением Фридмана, Леметр построил и изучил космологическую

модель нестатического типа, известную под названием теории расширяющейся вселенной [8].

Уравнение (8,5,6) допускает различные решения, зависящие от выбора знака $\dot{R}$ и от соотношения между коэффициентом пропорциональности в законе (8,5,5) и космологической постоянной. Найдем решение, содержащее статическое решение Эйнштейна. С этой целью положим $R = \text{const} = R_0$. Уравнения поля (8,5,3) примут при этом вид

$$\Lambda R_0^2 + 4\pi\rho_0 R_0^2 - 2 = 0; \ \Lambda = 4\pi\rho_0.$$

Присоединяя к ним соотношение $\rho_0 = \alpha R_0^{-3}$, получим

$$R_0 = \Lambda^{-\frac{1}{2}}; \ \rho_0 = \frac{\Lambda}{4\pi}; \ \alpha = \frac{1}{4\pi\Lambda^{\frac{1}{2}}}. \qquad (8,6,1)$$

Два первых равенства совпадают с соответствующими формулами статической модели Эйнштейна, последнее определяет значение α, при котором правая часть уравнения (8,5,6) имеет двойной положительный корень R_0.

Рассмотрим нестатическую модель Леметра, отвечающую линейному элементу (8,5,1) и уравнению

$$\dot{R} = +\sqrt{\frac{2}{3} R_0 R^{-1} + \frac{1}{3} R_0^{-2} R^2 - 1}, \qquad (8,6,2)$$

которое является частным случаем уравнения Фридмана при определенном выборе знака производной $\dot{R}$ и при указанных значениях постоянных α, Λ. Пространство этой модели представляет собой монотонно расширяющуюся сферу и содержит равномерно распределенные массы с плотностью, убывающей обратно пропорционально кубу радиуса. Объем пространства $V = 2\pi^2 R^3$ возрастает вместе с радиусом, тогда как полная масса $M = \frac{1}{2}\pi R_0$ остается постоянной.

Статическая модель Эйнштейна представляет собой состояние равновесия рассматриваемой модели. Однако это равновесие неустойчиво: если в какой-либо момент модель Леметра уклоняется от модели Эйнштейна, то со временем это уклонение будет возрастать.

Пусть в некоторый момент t_0 уклонение радиуса от равновесного значения R_0 составляет сколь угодно малую величину ε_0. Положив для произвольного момента $R = R_0 + \varepsilon$ и произведя разложение с точностью до членов второго порядка относительно ε включительно, получим

$$\frac{2}{3} R_0 R^{-1} + \frac{1}{3} R_0^{-2} R^2 - 1 = \frac{\varepsilon^2}{R_0^2}.$$

Дифференциальное уравнение (8,6,2) принимет при этом вид $\dot{\varepsilon} = \frac{\varepsilon}{R_0}$ и после интегрирования дает $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\frac{t^*}{R_0}}$, показывая, что со временем уклонение ε монотонно возрастает.

Вычислим время расширения модели. Воспользовавшись уравнением (8,6,2), найдем

$$t_2 - t_1 = R_0 \sqrt{3} \int_{x_1}^{x_2} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + \frac{2}{x} - 3}}; \quad x_1 = \frac{R_1}{R_0}; \quad x_2 = \frac{R_2}{R_0}. \quad (8,6,3)$$

Эта формула определяет время, в течение которого радиус модели возрастает от R_1 до R_2. При $R_1 = R_0$ интеграл (8,6,3) расходится.

Как и в статической модели Эйнштейна, общее поле тяготения модели Леметра не может привести в движение неподвижную частицу. В этом можно убедиться при помощи применявшегося уже соотношения $\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} + \Gamma^\sigma_{44} = 0$, в котором символ Кристофеля для метрики (8,5,1) равен нулю.

Рассмотрим эффект Допплера в модели Леметра.

Пусть источник излучения имеет заданные постоянные координаты ψ, θ, φ, а наблюдатель находится в начале координат. Принцип Допплера выражается в этом случае формулой $\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1}$, где t_1, t_2 — моменты излучения и наблюдения. Свет от источника к наблюдателю распространяется радиально, вследствие чего $d\theta = d\varphi = 0$. Положив в линейном элементе (8,5,1) $ds = 0$, получим $\frac{d\psi}{dt} = -R^{-1}$. Следовательно,

$$\psi = \int_{t_1}^{t_2} R^{-1} dt. \quad (8,6,4)$$

При заданном ψ этой формулой определяется момент наблюдения в функции момента излучения. Дифференцируя, находим $\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1}$, где R_1, R_2 — соответствующие значения радиуса модели. Поэтому принцип Допплера принимает следующий вид:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2}{R_1}, \quad (8,6,5)$$

* Напомним, что вычисление производится в релятивистских единицах. В системе *CGS* эта формула имеет следующий вид: $\varepsilon = \varepsilon_0 e^{\frac{ct}{R_0}}$.

показывая, что в спектре излучения источника с постоянными пространственными координатами должно наблюдаться смещение линий к красному концу спектра. Величина смещения определяется отношением радиусов в моменты наблюдения и излучения. Это отношение может заметно превосходить единицу только в том случае, если радиация распространяется достаточно долго, т. е. для достаточно удаленных источников излучения.

Представим соотношение (8,6,5) в приближенной форме. Положив $R_2 = R$, можно написать $R_1 = R - \dot{R}(t_2 - t_1)$. Расстояние источника излучения от начала координат в момент наблюдения составляет $l = R\psi$. С другой стороны, согласно (8,6,4), имеем $\psi = R^{-1}(t_2 - t_1)$; следовательно, $R_1 = R - \dot{R}l$. Принцип Допплера принимает теперь вид

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} l, \tag{8,6 6}$$

показывая, что в модели Леметра красное смещение в спектрах удаленных источников пропорционально расстояниям.

Этот вывод способствовал быстрому успеху теории Леметра. Как известно, в спектрах внегалактических туманностей наблюдается смещение линий в сторону длинных волн, причем величина этого смещения отвечает линейной корреляции Хаббла $V = Hl$, где H — так называемая постоянная Хаббла, которая, согласно современным данным, составляет 70—100 *км/сек* на мегапарсек. Если это явление отождествить с эффектом (8,6,5), обусловленным расширением космологической модели Леметра, то в релятивистских единицах получится: $H = \frac{\dot{R}}{R}$

Постоянная Хаббла и средняя плотность вещества являются основными данными наблюдений, позволяющими вычислить количественные характеристики модели Леметра: космологическую постоянную и современный радиус модели. Для этих вычислений следует воспользоваться уравнениями (8,5,4) и (8,5,5) вместе с последним соотношением (8,6,1). Принимая во внимание равенство $H = \frac{\dot{R}}{R}$, можно написать

$$H^2 = \frac{8\pi}{3}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - R^{-2}; \quad \rho = \frac{1}{4\pi}\Lambda^{-\frac{1}{2}} R^{-3}. \tag{8,6,7}$$

По формулам (8,6,1) определяют затем начальный радиус и начальную плотность. Время расширения находят из соотношения (8,6,3).

Для иллюстрации рассмотренной теории приведем количественные значения основных параметров модели Леметра, вычисленные в соответствии с данными наблюдений.

Согласно современным оценкам постоянной Хаббла и средней плотности вещества в Метагалактике, можно принять

$$H = 75\ км\,сек^{-1}/мпс \simeq 2 \cdot 10^{-18} смсек^{-1}/см;\quad \rho \simeq 10^{-31}\ гсм^{-3}.$$

В системе *CGS* написанные выше формулы имеют следующий вид:

$$\left(\frac{H}{c}\right)^2 = \frac{8\pi\gamma}{3c^2}\rho + \frac{1}{3}\Lambda - R^{-2};\quad \frac{4\pi\gamma}{c^2}\rho = \Lambda^{-\frac{1}{2}}R^{-3};\quad R_0 = \Lambda^{-\frac{1}{2}}.$$

Выполнив с их помощью необходимые вычисления, найдем

$$\Lambda \simeq 2 \cdot 10^{-56}\ см^{-2};\quad R \simeq 4 \cdot 10^{28}\ см;\quad R_0 \simeq 0{,}8 \cdot 10^{28}\ см.$$

Согласно (8,6,3), время, за которое радиус модели удвоился и достиг современного, составляет около 10^{10} лет.

Отметим, что в первой работе Леметр, пользуясь принятыми в то время данными наблюдений, получил для начального радиуса модели $8{,}5 \cdot 10^{26}$ *см*.

7. Нестатическая модель Эйнштейна. Концепцию однородной статической вселенной, наполненной веществом с отличной от нуля плотностью, можно совместить с ОТО, дополнив уравнения поля космологическим членом. В работе, опубликованной в 1931 г., Эйнштейн указал, что необходимость такого расширения уравнений поля существенно связана с гипотезой статичности. При отказе от условия статичности имеется возможность согласовать концепцию однородной вселенной с ОТО, «не вводя Λ-член, явно неудовлетворительный с теоретической точки зрения» [9].

В качестве исходной формы линейного элемента примем (8,5,1), где R представляет собой функцию временной координаты. Уравнения поля принимают в этом случае вид (8,5,3). Естественно спросить, можно ли построить непротиворечивую и согласную с наблюдениями космологию, опустив космологический член, введение которого было необходимо для устранения гравитационного парадокса в статической вселенной. Положив $\Lambda = 0$, перепишем уравнения (8,5,3) в виде

$$\dot{R}^2 + 2R\ddot{R} + 1 = 0;\quad 3\dot{R}^2 + 3 - 8\pi\rho R^2 = 0. \qquad (8,7,1)$$

Эта система позволяет определить функцию R, от которой зависит метрика пространства, и найти закон изменения плотности в процессе развития космологической модели во времени.

Первое уравнение (8,7,1) допускает непосредственное интегрирование и дает

$$\dot{R}^2 = \frac{R_0 - R}{R}, \qquad (8,7,2)$$

где R_0 — постоянная интегрирования.