8. Общая нестатическая модель. Сферическая вселенная Леметра и расширяющийся мир Эйнштейна являются частными вариантами общей однородной космологической модели, основанной на нестатическом решении уравнений поля ОТО. Переходим к краткому рассмотрению этой модели.

Линейный элемент трехмерного пространства Римана постоянной кривизны, как сказано в главе IV, может быть представлен в форме

$$d\sigma^2 = \left\{1 + \frac{1}{4}K(x^2 + y^2 + z^2)\right\}^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где K — кривизна пространства.

Введя радиус кривизны R, можно написать $K = kR^{-2}$, где $k = \pm 1{,}0$ для пространств положительной, отрицательной и нулевой кривизны соответственно. Поэтому исходную квадратическую форму для сферического, гиперболического и эвклидова пространств примем в виде

$$d\sigma^2 = \left\{1 + \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{4R^2}\right\}^{-2}(dx^2 + dy^2 + dz^2). \qquad (8,8,1)$$

Радиус кривизны одинаков во всех точках пространства. Считая его функцией времени, положим $R = R_0 e^{g(t)}$.

Преобразуем линейный элемент (8,8,1), перейдя к сферическим координатам при помощи соотношений,

$$x = e^{\frac{1}{2}g} r\sin\theta\cos\varphi; \quad y = e^{\frac{1}{2}g} r\sin\theta\sin\varphi; \quad z = e^{\frac{1}{2}g} r\cos\theta.$$

После вычислений получим

$$d\sigma^2 = e^{gt}\left(1 + \frac{kr^2}{4R_0^2}\right)^{-2}(dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\varphi^2). \qquad (8,8,2)$$

При исследовании свойства однородной космологической модели эту форму линейного элемента подробно изучали Робертсон [10] и Толман [11]. Для упрощения последующих выкладок преобразуем эту форму к виду, аналогичному (8,5,1).

При $k = \pm 1{,}0$ введем вместо r новую переменную ψ при помощи равенств

$$R_0\sin\psi = r\left(1 + \frac{r^2}{4R_0^2}\right)^{-1}; \quad R_0\operatorname{sh}\psi = r\left(1 - \frac{r^2}{4R_0^2}\right)^{-1}; \quad R_0\psi = r$$

соответственно.

В результате линейный элемент (8,8,2) приводится в указанных случаях к одной из следующих форм:

$$d\sigma^2 = R_0^2 e^{g(t)}\left\{d\psi^2 + \begin{pmatrix}\sin^2\psi \\ \operatorname{sh}^2\psi \\ \psi^2\end{pmatrix}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right\}. \qquad (8,8,3)$$

Четырехмерный линейный элемент ОТО, отвечающий пространствам с метриками (8,8,3), запишем в виде

$$ds^2 = -R^2\left\{d\psi^2 + \begin{pmatrix}\sin^2\psi \\ \mathrm{sh}^2\psi \\ \psi^2\end{pmatrix}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\right\} + dt^2, \quad (8,8,4)$$

объединяя упомянутые типы трехмерных пространств постоянной кривизны.

В модели первого типа пространство имеет форму трехмерной сферы, является замкнутым и в каждый момент обладает конечным объемом $2\pi^2R^3$. Второй случай соответствует разомкнутому гиперболическому пространству с бесконечно большим объемом, третий — пространству Эвклида, в котором расстояние между двумя точками с заданными постоянными координатами является функцией времени. Зависимость метрики (8,8,4) от временной координаты в каждом случае должна быть найдена из уравнений поля ОТО.

При составлении уравнений поля воспользуемся приемом, примененным в п. 5. С этой целью, наряду с четырехмерным континуумом (8,8,4), будем рассматривать трехмерное пространство с метрикой

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \begin{pmatrix}\sin^2\psi \\ \mathrm{sh}\,\psi \\ \psi^2\end{pmatrix}(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) = \gamma_{ij}dx^idx^j,$$

имеющее постоянную кривизну $k = \pm 1,0$.

Компоненты метрического тензора четырехмерного континуума определяются формулами

$$g_{ij} = -R^2\gamma_{ij};\ g_{i4} = 0;\ g_{44} = 1;$$
$$g^{ij} = -\frac{\gamma^{ij}}{R^2};\ g^{i4} = 0;\ g^{44} = 1,$$

в которых индексы i, j отличны от 4.

Тензор Риччи при $i,\ j \neq 4$ удовлетворяет формулам (см. 5)

$$R_{ij} = \overset{x}{R}_{ij} - (2\dot{R}^2 + R\ddot{R})\gamma_{ij},$$

где $\overset{x}{R}_{ij}$ — компоненты тензора Риччи пространства трех измерений. Последние, согласно (4,10,6), определяются соотношениями $R_{ij} = -2k\gamma_{ij}$, отвечающими каждому из рассматриваемых типов пространства при соответствующих значениях постоянной k.

Таким образом, компоненты тензора Риччи находятся по формулам

$$R_{ij} = -(2k + 2\dot{R}^2 + R\ddot{R})\gamma_{ij};\ R_{i4} = 0;\ R_{44} = 3R^{-1}\ddot{R}.$$

Ковариантные составляющие и скаляр тензора энергии-импульса вычисляются, как и в 5, при помощи равенств

$$T_{ii} = - pg_{ii} = p\gamma_{ii}R^2;\ T_{i4} = 0;\ T_{44} = \rho;\ T = \rho - 3p.$$

Воспользовавшись этими значениями, нетрудно составить уравнения поля в развернутой форме. Система десяти уравнений поля сводится в нашем случае к двум следующим дифференциальным уравнениям:

$$2\dot{R}^2 + R\ddot{R} + 2k - \Lambda R^2 = 4\pi R^2(\rho - p);$$

$$2R^{-1}\ddot{R} - \Lambda = -4\pi(\rho + 3p), \qquad (8,8,5)$$

связывающим радиус кривизны пространства с плотностью и давлением материи.

Прежде всего следует отметить, что при $\Lambda = 0$ решение $R = \text{const}$ дает $\rho = p = 0$. Стационарное решение при $\rho > 0$ и $p > 0$ существует лишь при $\Lambda \neq 0$. Таким образом, вновь приходим к выводу о том, что статическая однородная модель совместима с ОТО только при условии, что уравнения поля дополнены Λ-членом. В нестатическом же случае, когда радиус кривизны является функцией времени, уравнения (8,8,5) имеют решения при $\Lambda \gtreqless 0$.

Не останавливаясь на классификации нестатических однородных моделей, которая представляет главным образом математический интерес *, рассмотрим некоторые общие их свойства.

Разрешив систему уравнений (8,8,5) относительно давления и плотности, составим произведение ρR^3 и выполним его дифференцирование по времени. Сделав необходимые упрощения, получим

$$\frac{d}{dt}\rho R^3 = -3pR^2\dot{R}. \qquad (8,8,6)$$

Если радиус кривизны пространства является возрастающей функцией времени, то произведение ρR^3 убывает. Иными словами, плотность космологических масс уменьшается со временем быстрее, чем R^{-3}. В случае положительной кривизны, когда объем пространства конечен, полная масса $2\pi^2R^3\rho$ убывает при расширении модели и возрастает при ее сжатии. Масса замкнутой модели сохраняется только при $p = 0$, когда из (8,8,6) следует $\rho R^3 = \text{const}$.

Рассмотрим частицу, находящуюся в какой-либо точке с постоянными пространственными координатами, и определим ее ускорение в общем гравитационном поле модели. Согласно принципу геодезической линии, компоненты ускорения равны

* Подробную классификацию моделей можно найти во многих монографиях, например в известной книге Толмана.

$\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma^\sigma_{44}$; $\sigma = 1, 2, 3$. Для линейного элемента (8,8,4) все три величины Γ^σ_{44} тождественно исчезают, вследствие чего $\frac{d^2x^\sigma}{dt^2} = 0$. Как и в теории Леметра, общее поле тяготения модели не вызывает ускорения неподвижной частицы.

Согласно квадратической форме (8,8,4), пространственный элемент в какой-либо заданный момент времени имеет вид

$$dl^2 = R^2\gamma_{ij}dx^i dx^j; \qquad i, j = 1, 2, 3,$$

где γ_{ij} — функции только пространственных координат, R зависит от временной координаты.

Приложим эту формулу к линии, заданной параметрическими уравнениями $x^i = x^i(\tau)$. Элемент дуги линии

$$dl = R\left(\gamma_{ij}\,\frac{dx^i}{d\tau}\,\frac{dx^j}{d\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

а длина дуги между точками, отвечающими значениям параметра τ_1, τ_2, определяется формулой

$$l_{12} = R\int\limits_{\tau_1}^{\tau_2}\left(\gamma_{ij}\frac{dx^i}{d\tau}\frac{dx^j}{d\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Эта длина является функцией времени: вместе с R она возрастает в расширяющейся и убывает в сжимающейся модели. Изменение ее в единицу времени пропорционально длине:

$$\frac{dl_{12}}{dt} = \frac{\dot{R}}{R}\,l_{12}. \tag{8,8,7}$$

Все линейные размеры изменяются со временем в соответствии с законом расширения или сжатия модели, но отношения между ними остаются неизменными.

Принцип Допплера в обобщенной нестатической модели имеет такое же выражение, как и в теории Леметра. Если пространственные положения источника излучения и наблюдателя заданы постоянными координатами x_1^σ и x_2^σ, то, согласно общей формуле (6,7,1), принцип Допплера имеет следующий вид:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1},$$

где t_1, t_2 — моменты излучения и наблюдения соответственно.

Пусть световой луч, соединяющий точки излучения и наблюдения, задан параметрическими уравнениями $x^\sigma = x^\sigma(\tau)$.

Из условия $ds = 0$ непосредственно следует $dt^2 = R^2\gamma_{ij}dx^i dx^j$, откуда

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau}\right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Это соотношение определяет момент наблюдения в функции момента излучения. Поскольку правая часть равенства постоянна, дифференцирование дает $\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1}$. Поэтому

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2}{R_1}. \qquad (8,8,8)$$

Рассматривая космологическую модель Леметра, мы представили это соотношение в виде приближенной формулы (8,6,6), выражающей линейную корреляцию Хаббла между красным смещением и расстоянием до источника излучения. Вычислим теперь правую часть равенства (8,8,8) с точностью до членов второго порядка включительно.

Обозначив современное значение радиуса кривизны R_2 через R, получим соотношение

$$R_1 = R - \dot{R}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}\ddot{R}(t_2 - t_1)^2,$$

из которого следует

$$R_1^{-1} = R^{-1}\left\{1 + R^{-1}\dot{R}(t_2 - t_1) + \left(R^{-2}\dot{R}^2 - \frac{1}{2}R^{-1}\ddot{R}\right)(t_2 - t_1)^2\right\}.$$

Поэтому

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = R^{-1}\dot{R}(t_2 - t_1) + \left(R^{-2}\dot{R}^2 - \frac{1}{2}R^{-1}\ddot{R}\right)(t_2 - t_1)^2.$$

Согласно условию $ds = 0$, расстояние источника излучения от наблюдателя, находящегося в начале координат, определяется значением переменной $\psi = \int_{t_1}^{t_2} R^{-1}dt$. Воспользовавшись разложением $R^{-1}(t) = R^{-1}\{1 - R^{-1}\dot{R}(t - t_2)\}$, находим $\psi = R^{-1}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2}R^{-2}\dot{R}(t_2 - t_1)^2$, откуда с достаточной для наших целей точностью получим $t_2 - t_1 = R\psi - \frac{1}{2}R\dot{R}\psi^2$.

Величина $R\psi$ представляет собой расстояние l до источника излучения в момент наблюдения; следовательно, $t_2 - t_1 = l - \frac{1}{2}R^{-1}\dot{R}l^2$. Внося это соотношение в предыдущее уравнение, получим

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R}\, l + \frac{1}{2}\left(\frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R}\right) l^2. \qquad (8,8,9)$$

Следует обратить внимание на то, что при выводе принципа Доплера (8,8,8) и вытекающей из него формулы (8,8,9) мы не пользовались уравнениями поля и основывались лишь на общем виде линейного элемента (8,8,4), оставляя функцию $R(t)$ неопределенной. Спектральные линии должны смещаться в однородной космологической модели по закону (8,8,9) при любой форме уравнений поля, если только последние не противоречат упомянутому линейному элементу.

В релятивистской космологии приняты обозначения:

$$H = R^{-1}\dot{R};\ q = -R^{-1}\ddot{R}H^{-2}, \qquad (8,8,10)$$

где H — постоянная Хаббла, q — так называемый фактор замедления. В этих обозначениях формула (8,8,9) имеет вид

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = Hl + \frac{1}{2}(1+q)H^2 l^2. \qquad (8,8,11)$$

Рассмотрим несколько подробнее случай $\Lambda = 0$, $p = 0$, когда основные уравнения (8,8,5) переходят в следующие:

$$2\dot{R}^2 + R\ddot{R} + 2k = 4\pi\rho R^2;\ 3R\ddot{R} = -4\pi\rho R^2. \qquad (8,8,12)$$

С помощью этих уравнений или на основе найденного выше общего закона (8,8,6) можно убедиться в том, что произведение ρR^3 не изменяется со временем, вследствие чего можно положить $\rho = \frac{3a}{2\pi} R^3$, где a — постоянная интегрирования, которую можно найти, задавая для какого-либо момента плотность космических масс и радиус кривизны пространства. Комбинируя это соотношение с (8,8,12), находим уравнение $\dot{R}^2 + k = aR^{-1}$, определяющее изменение кривизны пространства со временем. Ограничиваясь расширяющейся моделью, можно написать

$$\dot{R} = \sqrt{aR^{-1} - k}. \qquad (8,8,13)$$

Это уравнение показывает, что при $k = 0$ и $k = -1$ расширение может начаться от состояния $R = 0$ и сопровождается монотонным возрастанием радиуса кривизны. Время расширения до некоторого R равно

$$t - t_0 = \int\limits_0^R \left(\frac{R}{a - kR}\right)^{\frac{1}{2}} dR.$$

При указанных значениях параметра k это время вычисляется по формулам

$$t - t_0 = \frac{2}{3} a^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}};$$

$$t - t_0 = \sqrt{R(R+a)} - \frac{a}{2} \ln \frac{\sqrt{R+a}+\sqrt{R}}{\sqrt{R+a}-\sqrt{R}} \tag{8,8,14}$$

соответственно.

Если же пространство сферическое ($k = 1$), то радиус кривизны увеличивается только до точки $R = a$, в которой расширение модели сменяется сжатием. Этот случай соответствует осциллирующей модели Эйнштейна, которая, как уже указывалось, не отвечает современным данным о Метагалактике.

В заключение рассмотрим еще космологическую модель, отвечающую условиям $p = 0$, $k = -1$ при $\Lambda \neq 0$. Нетрудно убедиться в том, что для расширяющейся модели система (8,8,5) приводит в этом случае к уравнению

$$\dot{R} = \sqrt{1 + aR^{-1} + \frac{1}{3}\Lambda R^2}.$$

При положительной космологической постоянной модель расширяется монотонно. Если же $\Lambda < 0$, то полином $a + R + \frac{1}{3}\Lambda R^3$ имеет положительный корень R_1. Поэтому радиус кривизны возрастает только до точки R_1, в которой расширение сменяется сжатием: модель оказывается осциллирующей. Время расширения модели до данного $R \leqslant R_1$ равно

$$t - t_0 = \int\limits_0^R \frac{dR}{\left(1 + aR^{-1} + \frac{1}{3}\Lambda R^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \tag{8,8,15}$$

9. Сравнение космологических моделей с наблюдениями. Сравнение космологических моделей с действительными свойствами окружающего нас мира основано на существующих оценках средней плотности вещества в Метагалактике и на результатах измерения красного смещения, наблюдаемого в спектрах внегалактических туманностей. Средняя плотность космического вещества выводится из наблюдаемого распределения галактик в пространстве и из определения масс галактик; по современным оценкам, как уже указывалось, она составляет около 10^{-31} *г* · *см*$^{-3}$.

Красное смещение в спектрах галактик характеризуется параметрами (8,8,10). Первым из них является постоянная Хаббла, значение которой выведено из достаточно большого числа