

8. **Общая нестатическая модель.** Сферическая вселенная Леметра и расширяющийся мир Эйнштейна являются частными вариантами общей однородной космологической модели, основанной на нестатическом решении уравнений поля ОТО. Переходим к краткому рассмотрению этой модели.

Линейный элемент трехмерного пространства Римана постоянной кривизны, как сказано в главе IV, может быть представлен в форме

$$d\sigma^2 = \left\{ 1 + \frac{1}{4} K (x^2 + y^2 + z^2) \right\}^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2),$$

где  $K$  — кривизна пространства.

Введя радиус кривизны  $R$ , можно написать  $K = kR^{-2}$ , где  $k = \pm 1, 0$  для пространств положительной, отрицательной и нулевой кривизны соответственно. Поэтому исходную квадратическую форму для сферического, гиперболического и эвклидова пространства примем в виде

$$d\sigma^2 = \left\{ 1 + \frac{k(x^2 + y^2 + z^2)}{4R^2} \right\}^{-2} (dx^2 + dy^2 + dz^2). \quad (8,8,1)$$

Радиус кривизны одинаков во всех точках пространства. Считая его функцией времени, положим  $R = R_0 e^{g(t)}$ .

Преобразуем линейный элемент (8,8,1), перейдя к сферическим координатам при помощи соотношений,

$$x = e^{\frac{1}{2} g} r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = e^{\frac{1}{2} g} r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = e^{\frac{1}{2} g} r \cos \theta.$$

После вычислений получим

$$d\sigma^2 = e^{g t} \left( 1 + \frac{k r^2}{4 R_0^2} \right)^{-2} (dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (8,8,2)$$

При исследовании свойства однородной космологической модели эту форму линейного элемента подробно изучали Робертсон [10] и Толман [11]. Для упрощения последующих выкладок преобразуем эту форму к виду, аналогичному (8,5,1).

При  $k = \pm 1, 0$  введем вместо  $r$  новую переменную  $\psi$  при помощи равенств

$$R_0 \sin \psi = r \left( 1 + \frac{r^2}{4 R_0^2} \right)^{-1}; \quad R_0 \operatorname{sh} \psi = r \left( 1 - \frac{r^2}{4 R_0^2} \right)^{-1}; \quad R_0 \psi = r$$

соответственно.

В результате линейный элемент (8,8,2) приводится в указанных случаях к одной из следующих форм:

$$d\sigma^2 = R_0^2 e^{g(t)} \left\{ d\psi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \\ \operatorname{sh}^2 \psi \\ \psi^2 \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\}. \quad (8,8,3)$$

Четырехмерный линейный элемент ОТО, отвечающий пространствам с метриками (8,8,3), запишем в виде

$$ds^2 = -R^2 \left\{ d\psi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \\ \text{sh}^2 \psi \\ \psi^2 \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \right\} + dt^2, \quad (8,8,4)$$

объединяя упомянутые типы трехмерных пространств постоянной кривизны.

В модели первого типа пространство имеет форму трехмерной сферы, является замкнутым и в каждый момент обладает конечным объемом  $2\pi^2 R^3$ . Второй случай соответствует разомкнутому гиперболическому пространству с бесконечно большим объемом, третий — пространству Эвклида, в котором расстояние между двумя точками с заданными постоянными координатами является функцией времени. Зависимость метрики (8,8,4) от временной координаты в каждом случае должна быть найдена из уравнений поля ОТО.

При составлении уравнений поля воспользуемся приемом, примененным в п. 5. С этой целью, наряду с четырехмерным континуумом (8,8,4), будем рассматривать трехмерное пространство с метрикой

$$d\sigma^2 = d\psi^2 + \begin{pmatrix} \sin^2 \psi \\ \text{sh} \psi \\ \psi^2 \end{pmatrix} (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) = \gamma_{ij} dx^i dx^j,$$

имеющее постоянную кривизну  $k = \pm 1, 0$ .

Компоненты метрического тензора четырехмерного континуума определяются формулами

$$g_{ij} = -R^2 \gamma_{ij}; \quad g_{i4} = 0; \quad g_{44} = 1;$$

$$g^{ij} = -\frac{\gamma^{ij}}{R^2}; \quad g^{i4} = 0; \quad g^{44} = 1,$$

в которых индексы  $i, j$  отличны от 4.

Тензор Риччи при  $i, j \neq 4$  удовлетворяет формулам (см. 5)

$$R_{ij} = \overset{x}{R}_{ij} - (2\overset{x}{R}^2 + R\ddot{R}) \gamma_{ij},$$

где  $\overset{x}{R}_{ij}$  — компоненты тензора Риччи пространства трех измерений. Последние, согласно (4,10,6), определяются соотношениями  $R_{ij} = -2k\gamma_{ij}$ , отвечающими каждому из рассматриваемых типов пространства при соответствующих значениях постоянной  $k$ .

Таким образом, компоненты тензора Риччи находятся по формулам

$$R_{ij} = -(2k + 2\overset{x}{R}^2 + R\ddot{R}) \gamma_{ij}; \quad R_{i4} = 0; \quad R_{44} = 3R^{-1}\ddot{R}.$$

Ковариантные составляющие и скаляр тензора энергии-импульса вычисляются, как и в 5, при помощи равенств

$$T_{ii} = -\rho g_{ii} = \rho \gamma_{ii} R^2; \quad T_{i4} = 0; \quad T_{44} = \rho; \quad T = \rho - 3\rho.$$

Воспользовавшись этими значениями, нетрудно составить уравнения поля в развернутой форме. Система десяти уравнений поля сводится в нашем случае к двум следующим дифференциальным уравнениям:

$$\begin{aligned} 2\dot{R}^2 + R\ddot{R} + 2k - \Lambda R^2 &= 4\pi R^2 (\rho - p); \\ 2R^{-1}\ddot{R} - \Lambda &= -4\pi (\rho + 3p), \end{aligned} \quad (8,8,5)$$

связывающим радиус кривизны пространства с плотностью и давлением материи.

Прежде всего следует отметить, что при  $\Lambda = 0$  решение  $R = \text{const}$  дает  $\rho = p = 0$ . Стационарное решение при  $\rho > 0$  и  $p > 0$  существует лишь при  $\Lambda \neq 0$ . Таким образом, вновь приходим к выводу о том, что статическая однородная модель совместима с ОТО только при условии, что уравнения поля дополнены  $\Lambda$ -членом. В нестатическом же случае, когда радиус кривизны является функцией времени, уравнения (8,8,5) имеют решения при  $\Lambda \geq 0$ .

Не останавливаясь на классификации нестатических однородных моделей, которая представляет главным образом математический интерес\*, рассмотрим некоторые общие их свойства.

Разрешив систему уравнений (8,8,5) относительно давления и плотности, составим произведение  $\rho R^3$  и выполним его дифференцирование по времени. Сделав необходимые упрощения, получим

$$\frac{d}{dt} \rho R^3 = -3p R^2 \dot{R}. \quad (8,8,6)$$

Если радиус кривизны пространства является возрастающей функцией времени, то произведение  $\rho R^3$  убывает. Иными словами, плотность космологических масс уменьшается со временем быстрее, чем  $R^{-3}$ . В случае положительной кривизны, когда объем пространства конечен, полная масса  $2\pi^2 R^3 \rho$  убывает при расширении модели и возрастает при ее сжатии. Масса замкнутой модели сохраняется только при  $p = 0$ , когда из (8,8,6) следует  $\rho R^3 = \text{const}$ .

Рассмотрим частицу, находящуюся в какой-либо точке с постоянными пространственными координатами, и определим ее ускорение в общем гравитационном поле модели. Согласно принципу геодезической линии, компоненты ускорения равны

\* Подробную классификацию моделей можно найти во многих монографиях, например в известной книге Толмана.

$\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = -\Gamma_{44}^\sigma$ ;  $\sigma = 1, 2, 3$ . Для линейного элемента (8,8,4) все три величины  $\Gamma_{44}^\sigma$  тождественно исчезают, вследствие чего  $\frac{d^2 x^\sigma}{dt^2} = 0$ . Как и в теории Леметра, общее поле тяготения модели не вызывает ускорения неподвижной частицы.

Согласно квадратической форме (8,8,4), пространственный элемент в какой-либо заданный момент времени имеет вид

$$dl^2 = R^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j, \quad i, j = 1, 2, 3,$$

где  $\gamma_{ij}$  — функции только пространственных координат,  $R$  зависит от временной координаты.

Приложим эту формулу к линии, заданной параметрическими уравнениями  $x^i = x^i(\tau)$ . Элемент дуги линии

$$dl = R \left( \gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau,$$

а длина дуги между точками, отвечающими значениям параметра  $\tau_1, \tau_2$ , определяется формулой

$$l_{12} = R \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Эта длина является функцией времени: вместе с  $R$  она возрастает в расширяющейся и убывает в сжимающейся модели. Изменение ее в единицу времени пропорционально длине:

$$\frac{dl_{12}}{dt} = \frac{\dot{R}}{R} l_{12}. \quad (8,8,7)$$

Все линейные размеры изменяются со временем в соответствии с законом расширения или сжатия модели, но отношения между ними остаются неизменными.

Принцип Допплера в обобщенной нестатической модели имеет такое же выражение, как и в теории Леметра. Если пространственные положения источника излучения и наблюдателя заданы постоянными координатами  $x_1^\sigma$  и  $x_2^\sigma$ , то, согласно общей формуле (6,7,1), принцип Допплера имеет следующий вид:

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{dt_2}{dt_1},$$

где  $t_1, t_2$  — моменты излучения и наблюдения соответственно.

Пусть световой луч, соединяющий точки излучения и наблюдения, задан параметрическими уравнениями  $x^\sigma = x^\sigma(\tau)$ .

Из условия  $ds = 0$  непосредственно следует  $dt^2 = R^2 \gamma_{ij} dx^i dx^j$ , откуда

$$\int_{t_1}^{t_2} \frac{dt}{R} = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left( \gamma_{ij} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^j}{d\tau} \right)^{\frac{1}{2}} d\tau.$$

Это соотношение определяет момент наблюдения в функции момента излучения. Поскольку правая часть равенства постоянна, дифференцирование дает  $\frac{dt_2}{dt_1} = \frac{R_2}{R_1}$ . Поэтому

$$\frac{\lambda + \delta\lambda}{\lambda} = \frac{R_2}{R_1}. \quad (8,8,8)$$

Рассматривая космологическую модель Леметра, мы представили это соотношение в виде приближенной формулы (8,6,6), выражающей линейную корреляцию Хаббла между красным смещением и расстоянием до источника излучения. Вычислим теперь правую часть равенства (8,8,8) с точностью до членов второго порядка включительно.

Обозначив современное значение радиуса кривизны  $R_2$  через  $R$ , получим соотношение

$$R_1 = R - \dot{R}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} \ddot{R}(t_2 - t_1)^2,$$

из которого следует

$$R_1^{-1} = R^{-1} \left\{ 1 + R^{-1} \dot{R}(t_2 - t_1) + \left( R^{-2} \dot{R}^2 - \frac{1}{2} R^{-1} \ddot{R} \right) (t_2 - t_1)^2 \right\}.$$

Поэтому

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = R^{-1} \dot{R}(t_2 - t_1) + \left( R^{-2} \dot{R}^2 - \frac{1}{2} R^{-1} \ddot{R} \right) (t_2 - t_1)^2.$$

Согласно условию  $ds = 0$ , расстояние источника излучения от наблюдателя, находящегося в начале координат, определяется значением переменной  $\psi = \int_{t_1}^{t_2} R^{-1} dt$ . Воспользовавшись разложением  $R^{-1}(t) = R^{-1} \{ 1 - R^{-1} \dot{R}(t - t_2) \}$ , находим  $\psi = R^{-1}(t_2 - t_1) + \frac{1}{2} R^{-2} \dot{R}(t_2 - t_1)^2$ , откуда с достаточной для наших целей точностью получим  $t_2 - t_1 = R\psi - \frac{1}{2} R \dot{R} \psi^2$ .

Величина  $R\psi$  представляет собой расстояние  $l$  до источника излучения в момент наблюдения; следовательно,  $t_2 - t_1 = l - \frac{1}{2} R^{-1} \dot{R} l^2$ . Внося это соотношение в предыдущее уравнение,

получим

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = \frac{\dot{R}}{R} l + \frac{1}{2} \left( \frac{\dot{R}^2}{R^2} - \frac{\ddot{R}}{R} \right) l^2. \quad (8,8,9)$$

Следует обратить внимание на то, что при выводе принципа Доплера (8,8,8) и вытекающей из него формулы (8,8,9) мы не пользовались уравнениями поля и основывались лишь на общем виде линейного элемента (8,8,4), оставляя функцию  $R(t)$  неопределенной. Спектральные линии должны смещаться в однородной космологической модели по закону (8,8,9) при любой форме уравнений поля, если только последние не противоречат упомянутому линейному элементу.

В релятивистской космологии приняты обозначения:

$$H = R^{-1}\dot{R}; \quad q = -R^{-1}\ddot{R}H^{-2}, \quad (8,8,10)$$

где  $H$  — постоянная Хаббла,  $q$  — так называемый фактор замедления. В этих обозначениях формула (8,8,9) имеет вид

$$\frac{\delta\lambda}{\lambda} = Hl + \frac{1}{2} (1 + q) H^2 l^2. \quad (8,8,11)$$

Рассмотрим несколько подробнее случай  $\Lambda = 0$ ,  $p = 0$ , когда основные уравнения (8,8,5) переходят в следующие:

$$2\dot{R}^2 + R\ddot{R} + 2k = 4\pi\rho R^2; \quad 3R\ddot{R} = -4\pi\rho R^2. \quad (8,8,12)$$

С помощью этих уравнений или на основе найденного выше общего закона (8,8,6) можно убедиться в том, что произведение  $\rho R^3$  не изменяется со временем, вследствие чего можно положить  $\rho = \frac{3a}{2\pi} R^3$ , где  $a$  — постоянная интегрирования, которую можно найти, задавая для какого-либо момента плотность космических масс и радиус кривизны пространства. Комбинируя это соотношение с (8,8,12), находим уравнение  $\dot{R}^2 + k = aR^{-1}$ , определяющее изменение кривизны пространства со временем. Ограничиваясь расширяющейся моделью, можно написать

$$\dot{R} = \sqrt{aR^{-1} - k}. \quad (8,8,13)$$

Это уравнение показывает, что при  $k = 0$  и  $k = -1$  расширение может начаться от состояния  $R = 0$  и сопровождается монотонным возрастанием радиуса кривизны. Время расширения до некоторого  $R$  равно

$$t - t_0 = \int_0^R \left( \frac{R}{a - kR} \right)^{\frac{1}{2}} dR.$$

При указанных значениях параметра  $k$  это время вычисляется по формулам

$$t - t_0 = \frac{2}{3} a^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}};$$

$$t - t_0 = \sqrt{R(R+a)} - \frac{a}{2} \ln \frac{\sqrt{R+a} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+a} - \sqrt{R}} \quad (8,8,14)$$

соответственно.

Если же пространство сферическое ( $k = 1$ ), то радиус кривизны увеличивается только до точки  $R = a$ , в которой расширение модели сменяется сжатием. Этот случай соответствует осциллирующей модели Эйнштейна, которая, как уже указывалось, не отвечает современным данным о Метагалактике.

В заключение рассмотрим еще космологическую модель, отвечающую условиям  $p = 0$ ,  $k = -1$  при  $\Lambda \neq 0$ . Нетрудно убедиться в том, что для расширяющейся модели система (8,8,5) приводит в этом случае к уравнению

$$\dot{R} = \sqrt{1 + aR^{-1} + \frac{1}{3} \Lambda R^2}.$$

При положительной космологической постоянной модель расширяется монотонно. Если же  $\Lambda < 0$ , то полином  $a + R + \frac{1}{3} \Lambda R^3$  имеет положительный корень  $R_1$ . Поэтому радиус кривизны возрастает только до точки  $R_1$ , в которой расширение сменяется сжатием: модель оказывается осциллирующей. Время расширения модели до данного  $R \leq R_1$  равно

$$t - t_0 = \int_0^R \frac{dR}{\left(1 + aR^{-1} + \frac{1}{3} \Lambda R^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \quad (8,8,15)$$

**9. Сравнение космологических моделей с наблюдениями.** Сравнение космологических моделей с действительными свойствами окружающего нас мира основано на существующих оценках средней плотности вещества в Метагалактике и на результатах измерения красного смещения, наблюдаемого в спектрах внегалактических туманностей. Средняя плотность космического вещества выводится из наблюдаемого распределения галактик в пространстве и из определения масс галактик; по современным оценкам, как уже указывалось, она составляет около  $10^{-31} \text{ г} \cdot \text{см}^{-3}$ .

Красное смещение в спектрах галактик характеризуется параметрами (8,8,10). Первым из них является постоянная Хаббла, значение которой выведено из достаточно большого числа