При указанных значениях параметра k это время вычисляется по формулам

$$t - t_0 = \frac{2}{3} a^{-\frac{1}{2}} R^{\frac{3}{2}};$$

$$t - t_0 = \sqrt{R(R+a)} - \frac{a}{2} \ln \frac{\sqrt{R+a} + \sqrt{R}}{\sqrt{R+a} - \sqrt{R}} \qquad (8,8,14)$$

соответственно.

Если же пространство сферическое ($k = 1$), то радиус кривизны увеличивается только до точки $R = a$, в которой расширение модели сменяется сжатием. Этот случай соответствует осциллирующей модели Эйнштейна, которая, как уже указывалось, не отвечает современным данным о Метагалактике.

В заключение рассмотрим еще космологическую модель, отвечающую условиям $p = 0$, $k = -1$ при $\Lambda \neq 0$. Нетрудно убедиться в том, что для расширяющейся модели система (8,8,5) приводит в этом случае к уравнению

$$\dot{R} = \sqrt{1 + aR^{-1} + \frac{1}{3} \Lambda R^2}.$$

При положительной космологической постоянной модель расширяется монотонно. Если же $\Lambda < 0$, то полином $a + R + \frac{1}{3} \Lambda R^3$ имеет положительный корень R_1. Поэтому радиус кривизны возрастает только до точки R_1, в которой расширение сменяется сжатием: модель оказывается осциллирующей. Время расширения модели до данного $R \leqslant R_1$ равно

$$t - t_0 = \int_0^R \frac{dR}{\left(1 + aR^{-1} + \frac{1}{3} \Lambda R^2\right)^{\frac{1}{2}}}. \qquad (8,8,15)$$

9. Сравнение космологических моделей с наблюдениями. Сравнение космологических моделей с действительными свойствами окружающего нас мира основано на существующих оценках средней плотности вещества в Метагалактике и на результатах измерения красного смещения, наблюдаемого в спектрах внегалактических туманностей. Средняя плотность космического вещества выводится из наблюдаемого распределения галактик в пространстве и из определения масс галактик; по современным оценкам, как уже указывалось, она составляет около 10^{-31} *г* · *см*$^{-3}$.

Красное смещение в спектрах галактик характеризуется параметрами (8,8,10). Первым из них является постоянная Хаббла, значение которой выведено из достаточно большого числа

наблюдений после весьма тщательного и всестороннего обсуждения; оно составляет около 75 *км · сек*$^{-1}$/*мпс*. Второй параметр определяет уклонение красного смещения от линейной корреляции Хаббла; в настоящее время уверенных его оценок не существует. Анализ наблюдений и их сравнение с соотношением (8,8,11) показывают, что по порядку эта величина близка к единице и заключена, по-видимому, в пределах от 0 до 1. Подробный обзор современного состояния вопроса о наблюдательных основах космологии можно найти в [12].

В дальнейшем принимаются следующие значения упомянутых параметров с системе *CGS*:

$$\rho \simeq 10^{-31}\ г\cdot см^{-3};\quad H \simeq 2\cdot 10^{-18}\ сек^{-1};\quad q \simeq 1.$$

Согласно (8,8,10), эти величины позволяют найти отношения $\frac{R}{R}$ и $\frac{\ddot{R}}{R}$ независимо от конкретной формы космологической модели. Для использования полученных отношений в космологической модели ОТО необходимо применить уравнения поля (8,8,5). Положив $p = 0$ и воспользовавшись обозначениями (8,8,10), можно написать

$$\frac{2k}{R^2} = 4\pi\rho + (q-2)H^2 + \Lambda;$$

$$3qH^2 = 4\pi\rho - \Lambda.$$

Сферическая, эвклидова и гиперболическая однородные модели отвечают значениям $k = 1, 0, -1$ соответственно. Внося в эти уравнения наблюдаемые значения ρ, H, q, можно найти космологическую постоянную и современный радиус кривизны, а также установить знак k, определив таким образом тип модели.

Исключая последовательно q, затем ρ, перепишем эту систему в виде

$$\frac{k}{R^2} = \frac{8\pi}{3}\rho - H^2 + \frac{1}{3}\Lambda;\quad \frac{k}{R^2} = (2q-1)H^2 + \Lambda. \qquad (8,9,1)$$

Рассмотрим случай $\Lambda = 0$, когда уравнения поля не содержат космологического члена.

Нулевой кривизне пространства соответствует плотность, называемая критической. В системе *CGS* она определяется, согласно (8,9,1), соотношением $8\pi\gamma\rho_{кр} = 3H^2$, которое при указанном значении постоянной Хаббла дает $\rho_{кр} = 10^{-29}\ г\cdot см^{-3}$. При $\rho \gtrless \rho_{кр}$ модель имеет, соответственно, положительную или отрицательную кривизну. Поскольку оценка средней плотности в Метагалактике существенно меньше $\rho_{кр}$, реальным условиям должна отвечать разомкнутая модель с бесконечно большими объемом и массой. Однако, согласно второй формуле (8,9,2), при $k = -1$ должно быть $q < 0{,}5$, что едва

ли приемлемо, поскольку наиболее вероятное значение q, по-видимому, близко к единице.

Для однородной расширяющейся модели есть еще одна существенная трудность как при $\Lambda = 0$, так и при $\Lambda \neq 0$.

Внося наблюдаемые параметры в первое соотношение (8,9,1), при $k = -1$ найдем современный радиус кривизны пространства, составляющий приблизительно $1{,}2 \cdot 10^{28}$ *см* *. Теперь можно вычислить время расширения модели до ее современного состояния, т. е. определить верхнюю границу возраста Метагалактики. Входящая в (8,8,14) постоянная a в системе CGS находится с помощью соотношения $a = \frac{8}{3}\pi\gamma c^{-2}\rho R^3$. Время расширения модели до современного радиуса составляет около $1{,}4 \cdot 10^{10}$ лет. В качестве верхней границы возраста Метагалактики такая оценка чрезмерно мала, ибо возраст отдаленных звездных скоплений в Галактике оценивается значительно большими промежутками времени.

Итак, при $\Lambda = 0$ сравнение однородной космологической модели с наблюдениями приводит к противоречивым выводам. Естественно поэтому рассмотреть случай $\Lambda \neq 0$, положив в основу космологической модели уравнения поля с Λ-членом, хотя последний, как уже было сказано, представлялся Эйнштейну неудовлетворительным.

Уравнения (8,9,1) имеют в этом случае решение

$$\frac{k}{R^2} = 4\pi\rho - (1 + q)H^2; \quad \Lambda = 4\pi\rho - 3qH^2.$$

При всех допустимых значениях q знак кривизны пространства определяется однозначно: согласно первому из написанных равенств, $k = -1$. Оставляя параметр замедления неопределенным, получим

$$R = 1{,}25(1 + q)^{-\frac{1}{2}} \cdot 10^{28} \text{ см}; \quad \Lambda = 9{,}35 \cdot 10^{-59} -$$

$$- 1{,}92q \cdot 10^{-56} \text{ см}^{-2}.$$

В случае отрицательного q радиус кривизны расширяющейся модели монотонно возрастает при соответствующем убывании плотности. Если же $q > 0$, то $\Lambda < 0$ и, как уже было сказано, модель расширяется до некоторого конечного R_1, при котором трехчлен $a + R + \frac{1}{2}\Lambda R^3$ принимает нулевое значение, после чего расширение сменяется сжатием.

Пусть $q = 0{,}5$. Современный радиус кривизны модели оказывается равным $1{,}02 \cdot 10^{28}$ *см*, а время расширения модели, согласно

* Это значение совместимо со вторым уравнением (8,9,1) при достаточно малом q.

(8,8,15), составляет около $1{,}5 \cdot 10^{10}$ лет. Расширение будет продолжаться еще $2{,}7 \cdot 10^{9}$ лет и при $k_1 = 1{,}05 \cdot 10^{28}$ *см* сменится сжатием. Для сравнения положим $q = -0{,}5$, когда расширение модели продолжается неограниченно. Современный радиус кривизны равен в этом случае $1{,}8 \cdot 10^{28}$ *см*, время расширения — около $1{,}8 \cdot 10^{10}$ лет.

ЛИТЕРАТУРА

1. W. Olbers.— Bode Jahrbericht, 1826.
2. H. Seeliger.— Astron. Nachr., **137**, 129, 1895; Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, 1896, 373. C. Neuman Allgemeine Untersuchungen über das Newtonische Princip. Leipzig, 1896.
3. R. Proctor. The Universe of Stars. London, 1878.
4. C. L. Charlier.— Arkiv Matem. Astronomi, Fysik, **16**, N 21. Stockholm, 1921.
5. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., **1**, 142, 1917. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, **1**, 601. «Наука», М., 1965.
6. De Sitter.— Proceedings Koninkl Akad. Wetensch., **19**, 1217, Amsterdam, 1917; Month. Not. Roy. Astronom. Soc., **78**, 3, 1917.
7. A. Friedmann.— Zeitschr. Phys., **10**, 377, 1922; **21**, 326, 1924. Русск. пер.: А. А. Фридман. Избранные труды. «Наука», М., 1966.
8. G. Lemaitre. Bruxelles Ann. Soc. Science, **47A**, 49, 1927; Month. Not. Roy. Astron. Soc., **91**, 483, 1931.
9. A. Einstein.— Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss., 1931, 235. Русск. пер.: Собр. научн. трудов, **2**, 349. «Наука», М., 1966.
10. H. P. Robertson.— Proceedings Nat. Acad. Scien., **15**, 822. Washington, 1929.
11. R. C. Tolman.— Proceedings Nat. Acad. Scien., **16**, 320. Washington, 1930.
12. Наблюдательные основы космологии. «Мир», М. 1965.