Как показывают измерения, отношение $\frac{\bar{r}_{ij}}{\rho}$ составляет около 4500. Поэтому для коэффициента f формула (9,10,3) позволяет получить вполне приемлемое значение.

Другой аргумент в пользу закона (9,10,2) связан с вопросом о массе Галактики. Если принять, что радиус галактической орбиты Солнца составляет $r = 8{,}2$ *кпс*, а его орбитальная скорость $v = 220$ *км сек*$^{-1}$, то центральная масса, вычисленная по очевидной формуле $\frac{rv^2}{\gamma}$, равна $0{,}9 \cdot 10^{11} M_{\odot}$. Между тем масса Галактики, определяемая по радиальным скоростям шаровых скоплений, достигает $2{,}3 \cdot 10^{11}$. Такое различие чрезмерно велико. Если же воспользоваться законом (9,10,2), то оба определения оказываются очень близкими. Первое из них находится по формуле $\frac{(\rho r)^{\frac{1}{2}} v^2}{\gamma}$ и составляет $0{,}2 \cdot 10^{11} M_{\odot}$, а второе уменьшается до $0{,}3 \cdot 10^{11} M_{\odot}$.

А. Финзи приводит также несколько других независимых соображений, которые, по его мнению, могут свидетельствовать в пользу гипотезы о более медленном убывании силы тяготения на больших расстояниях.

С точки зрения гипотезы Финзи, приходится признать, что и ОТО ограничена относительно небольшими расстояниями и не может применяться к Метагалактике.

11. Теория Биркгофа. Наряду с ОТО существуют так называемые линейные теории гравитации, развитые в рамках плоского пространства-времени. В этих теориях, опирающихся на общую с ОТО эмпирическую основу, гравитация рассматривается как особое силовое поле в пространственно-временном континууме Минковского. Несмотря на столь глубокое отличие в подходе к проблеме гравитации, линейные теории в случае достаточно слабого поля имеют много общего с ОТО и приводят к сходным с последней конечным результатам. В частности, они позволяют дать количественно правильное описание трех элементарных эффектов ОТО: движения линии апсид планетной орбиты, искривления световых лучей в поле тяготения Солнца и гравитационного смещения спектральных линий. Можно ожидать, что при изучении эффектов слабого поля гравитации линейная теория в известных пределах может оказаться эквивалентной ОТО, тогда как с усилением поля различие между этими теориями резко возрастает.

Рассмотрим один из вариантов линейной теории тяготения — теорию Биркгофа [37], в которой гравитация интерпретируется как некоторое поле в четырехмерном пространстве-времени ОТО с квадратической формой

$$ds^2 = -dx^2 - dy^2 - dz^2 + dt^2. \qquad (9,11,1)$$

Введем четырехмерный вектор скорости $u^i = \frac{dx^i}{ds}$, где через x^i обозначены пространственные $x^1 = x$, $x^2 = y$, $x^3 = z$ и временная $x^4 = t$ координаты. Распределение масс зададим тензором энергии-импульса

$$T^{ij} = \rho\left(u^i u^j - \frac{1}{2}\,\delta^{ij}\right), \qquad (9{,}11{,}2)$$

где ρ — плотность массы, σ^{ij} — контравариантные составляющие метрического тензора, совпадающие с коэффициентами квадратической формы (9,11,1):

$$\delta^{ij} = \delta_{ij} = \begin{matrix} -1, & i = j = 1, 2, 3; \\ +1, & i = j = 4; \\ 0, & i \neq j. \end{matrix}$$

Закон движения частицы принимается в такой форме:

$$\frac{\partial T^{i\alpha}}{\partial x^\alpha} = f^i; \qquad i = 1, \ldots, 4. \qquad (9{,}11{,}3)$$

Здесь f^i — контравариантные компоненты четырехмерного вектора силы тяготения, отнесенного к единице объема и связанного с ковариантными компонентами обычным соотношением $f^i = \delta^{\alpha i} f_\alpha = \delta^{ii} f_i$. Вектор силы определяется в теории Биркгофа формулами

$$f_i = \rho\left(\frac{\partial h_{i\alpha}}{\partial x^\beta} - \frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial x^i}\right) u^\alpha u^\beta, \qquad (9{,}11{,}4)$$

где ρ — плотность движущейся частицы, u^i — четырехмерный вектор ее скорости. Десять симметричных величин h_{ij} образуют г р а в и т а ц и о н н ы й п о т е н ц и а л, удовлетворяющий дифференциальному уравнению

$$\Box h_{ij} = 8\pi T_{ij}; \quad \Box = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial t^2}, \qquad (9{,}11{,}5)$$

составленному по аналогии с уравнением Пуассона теории тяготения Ньютона.

Можно отметить, что, согласно принятому определению, сила, действующая на движущуюся в поле гравитации частицу, перпендикулярна к ее скорости, поскольку оба вектора отвечают условию $f_i u^i = 0$, следующему из (9,11,4).

Нетрудно убедиться в том, что при достаточно малых скоростях гравитирующих масс и пробной частицы теория Биркгофа совпадает с механикой Ньютона. Действительно, положив $u^1 \simeq u^2 \simeq u^3 \simeq 0$, $u^4 \simeq 1$, находим, что диагональные компоненты тензора

(9,11,2) одинаковы и равны $\frac{1}{2}\rho$, тогда как остальные компоненты исчезают. Такие значения имеют и ковариантные составляющие тензора энергии-импульса, вследствие чего уравнение (9,11,5) для гравитационных потенциалов переходит в уравнение Пуассона $\nabla^2 h_{ii} = -4\pi\rho$, решением которого служит обычный потенциал φ теории Ньютона. Компоненты h_{ij} с различными индексами, удовлетворяющие уравнению Лапласа во всем пространстве, имеют нулевые значения.

Вектор силы, действующий на пробную частицу с постоянной плотностью ρ, определяется формулой (9,11,4). Считая скорость частицы весьма малой по сравнению со скоростью света, находим $f_i = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ при $i = 1, 2, 3$ и $f_4 = 0$. Контравариантные компоненты силы отличаются от f_i знаком.

Левые части уравнений (9,11,3) приводятся к величинам

$$\rho\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}u^\alpha + \rho u^i\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \rho\frac{du^i}{ds},$$

так как сумма $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}$ при сделанных предположениях имеет нулевое значение.

Таким образом, в рассматриваемом приближении закон движения теории Биркгофа принимает вид $\frac{du^i}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$, совпадая с законом движения механики Ньютона.

12. Задача Кеплера в теории Биркгофа. Переходим к задаче о движении частицы в заданном центральном поле.

Пусть статическое поле гравитации обусловлено массой со сферическим распределением, симметричным относительно начала координат. Как и в предыдущем случае, гравитационный потенциал имеет компоненты $h_{ii} = \varphi = \frac{m}{r}$, $h_{ij} = 0$, $i \neq j$. Однако теперь необходимо учитывать все четыре составляющие вектора скорости, вследствие чего выражение для компонент силы оказывается более сложным.

По формуле (9,11,4) находим

$$f_i = \rho\left[\varphi u^i - \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right],$$

где точкой обозначено дифференцирование по s. При этом принято во внимание соотношение $\dot{t}^2 = 1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, непосредственно вытекающее из квадратической формы (9,11,1).

Контравариантные компоненты силы, составляющие правые части закона движения (9,11,3), связаны с ковариантными