(9,11,2) одинаковы и равны $\frac{1}{2}\rho$, тогда как остальные компоненты исчезают. Такие значения имеют и ковариантные составляющие тензора энергии-импульса, вследствие чего уравнение (9,11,5) для гравитационных потенциалов переходит в уравнение Пуассона $\nabla^2 h_{ii} = -4\pi\rho$, решением которого служит обычный потенциал φ теории Ньютона. Компоненты h_{ij} с различными индексами, удовлетворяющие уравнению Лапласа во всем пространстве, имеют нулевые значения.

Вектор силы, действующий на пробную частицу с постоянной плотностью ρ, определяется формулой (9,11,4). Считая скорость частицы весьма малой по сравнению со скоростью света, находим $f_i = -\rho\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$ при $i = 1, 2, 3$ и $f_4 = 0$. Контравариантные компоненты силы отличаются от f_i знаком.

Левые части уравнений (9,11,3) приводятся к величинам

$$\rho\frac{\partial u^i}{\partial x^\alpha}u^\alpha + \rho u^i\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \rho\frac{du^i}{ds},$$

так как сумма $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}$ при сделанных предположениях имеет нулевое значение.

Таким образом, в рассматриваемом приближении закон движения теории Биркгофа принимает вид $\frac{du^i}{ds} = \frac{\partial\varphi}{\partial x^i}$, совпадая с законом движения механики Ньютона.

12. Задача Кеплера в теории Биркгофа. Переходим к задаче о движении частицы в заданном центральном поле.

Пусть статическое поле гравитации обусловлено массой со сферическим распределением, симметричным относительно начала координат. Как и в предыдущем случае, гравитационный потенциал имеет компоненты $h_{ii} = \varphi = \frac{m}{r}$, $h_{ij} = 0$, $i \neq j$. Однако теперь необходимо учитывать все четыре составляющие вектора скорости, вследствие чего выражение для компонент силы оказывается более сложным.

По формуле (9,11,4) находим

$$f_i = \rho\left[\varphi u^i - \frac{\partial\varphi}{\partial x^i} - 2\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)\right],$$

где точкой обозначено дифференцирование по s. При этом принято во внимание соотношение $\dot{t}^2 = 1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$, непосредственно вытекающее из квадратической формы (9,11,1).

Контравариантные компоненты силы, составляющие правые части закона движения (9,11,3), связаны с ковариантными соотношениями $f^i = \delta^{ii} f_i$. Левые части этого закона имеют вид $\rho\left(\dot{u}^i + u^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}\right)$.

Произведя необходимые подстановки, получим следующую систему уравнения движения:

$$\dot{u}^i + u^i \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \dot{\varphi} u^i + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \qquad i = 1, 2, 3;$$

$$\ddot{t} + \dot{t} \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \dot{\varphi} \dot{t}. \tag{9,12,1}$$

Покажем, что входящая в эти уравнения сумма $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha}$ имеет нулевое значение.

Умножим три первые уравнения (9,12,1) соответственно на $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$ и сложим их. Принимая во внимание равенство $\dot{t}^2 = 1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2$ и вытекающее из него соотношение $\dot{t}\ddot{t} = \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z}$, найдем

$$\dot{t}\ddot{t} + \dot{t}^2 \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = \frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} + \dot{\varphi} \dot{t}^2.$$

Сравнивая это равенство с последним уравнением (9,12,1), получим $\frac{\partial u^\alpha}{\partial x^\alpha} = 0$. Таким образом, движение частицы в статическом поле тяготения определяется в теории Биркгофа уравнениями

$$\dot{u}^i = \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} - \dot{\varphi} u^i + 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x^i} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2); \qquad i = 1, 2, 3;$$

$$\ddot{t} = \dot{\varphi} \dot{t}. \tag{9,12,2}$$

Последнее из них непосредственно интегрируется и дает

$$\frac{dt}{ds} = Ce_\varphi, \tag{9,12,3}$$

где C — постоянная интегрирования.

На бесконечности, а также в отсутствие поля, когда можно положить $\varphi = 0$, частица движется без ускорения. В этих случаях, в согласии со СТО, имеем

$$\frac{dt}{ds} = \text{const} = \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

где v — постоянная скорость частицы.

При наличии поля формула (9,12,3) показывает, что продолжительности физических явлений, в частности периоды циклических процессов, возрастают вместе с гравитационным потенциалом.

Для оценки результативности теории Биркгофа основной интерес представляет вопрос о движении линии апсид планетной орбиты. Как уже было сказано, вывод этой теории в соответствующем приближении совпадает с известным результатом ОТО.

Прежде всего заметим, что движение, определяемое тремя первыми уравнениями (9,12,2), является плоским. Действительно, если допустить, что в какой-либо момент движение происходило в плоскости xy, вследствие чего z и $\dot{z}$ имели нулевые значения, то с помощью последнего из этих уравнений легко убедиться в том, что в указанный момент исчезали производные всех порядков переменной z. Поэтому при соответствующем выборе координат закон движения приводит к системе двух уравнений

$$\ddot{x} = -\frac{mx}{r^3} - \frac{2mx}{r^3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\dot{x}\dot{r}}{r^2};$$

$$\ddot{y} = -\frac{my}{r^3} - \frac{2my}{r^3}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + \frac{m\dot{y}\dot{r}}{r^2}. \qquad (9,12,4)$$

Найдем первые интегралы этой системы.

Умножая уравнения (9,12,4) на $\dot{x}$, $\dot{y}$ и сложив их, получим

$$\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} = -\frac{m\dot{r}}{r^2}(1 + \dot{x}^2 + \dot{y}^2),$$

откуда непосредственно следует

$$\dot{x}^2 + \dot{y}^2 = Ae^{\frac{2m}{r}} - 1, \qquad (9,12,5)$$

где A — постоянная интегрирования.

Если те же уравнения умножить соответственно на $-y$, x, то после сложения получится соотношение

$$x\ddot{y} - y\ddot{x} = \frac{m\dot{r}}{r^2}(x\dot{y} - y\dot{x}),$$

из которого следует обобщенный интеграл площадей

$$x\dot{y} - y\dot{x} = Be^{-\frac{m}{r}}, \qquad (9,12,6)$$

где B — новая постоянная.

Перейдем к полярным координатам. Комбинируя первые интегралы (9,12,5) и (9,12,6) и вводя переменную $u = \frac{1}{r}$, нетрудно составить дифференциальное уравнение орбиты

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = ae^{4mu} - be^{2mu}, \qquad (9,12,7)$$

где для краткости принято $a = AB^{-2}$, $b = B^{-2}$.

Постоянные a, b легко выразить через параметры кеплеровой орбиты.

Сохраняя члены первого порядка относительно mu, представим уравнение (9,12,7) следующим образом:

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = a - b + 2m(2a - b)u.$$

Оно совпадает с уравнением орбиты механики Ньютона

$$\left(\frac{du^2}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{p}u$$

при следующем выборе постоянных:

$$a = \frac{p + m(1 - e^2)}{mp^2}; \quad b = \frac{p + 2m(1 - e^2)}{mp^2}.$$

Для вывода релятивистского эффекта необходимо сохранить в правой части (9,12,7) члены второго порядка относительно переменной u. Выполнив соответствующее разложение, получим

$$\left(\frac{du}{d\varphi}\right)^2 + u^2 = \frac{e^2 - 1}{p^2} + \frac{2}{p}u + \frac{6m}{p}u^2. \qquad (9,12,8)$$

В принятом приближении это уравнение имеет решение

$$u = \frac{1}{p} + \frac{6m}{p^2} + \frac{l}{p}\cos\left(\varphi - \frac{3m}{p}\varphi\right)$$

и при $e < 1$ представляет собой эллипс с фокальным параметром $p - 6m$, эксцентриситетом $e\left(1 - \frac{6m}{p}\right)$ и переменной долготой перигелия, возрастающей пропорционально полярному углу. В течение одного обращения линия апсид орбиты поворачивается в прямом направлении на угол $\frac{6\pi m}{p}$. Таким образом, в ограниченной задаче двух тел теория Биркгофа приводит к эффекту, совпадающему с известным выводом ОТО, и в данном приближении не содержит других вековых эффектов.

Следует, однако, заметить, что результаты обеих теорий совпадают только в ограниченной задаче, когда масса движущейся частицы пренебрежима по сравнению с массой центрального тела. В общей задаче двух тел такого совпадения нет.

Формула теории Биркгофа в этом случае такова:

$$\Delta\omega = \frac{2\pi\,(3m_1^2 + 7m_1m_2 + 3m_2^2)}{(m_1 + m_2)\,p},$$

тогда как ОТО приводит к величине

$$\Delta\omega = \frac{6\pi\,(m_1 + m_2)}{p}.$$

В случае одинаковых масс эти величины относятся как 13 : 12. К сожалению, в настоящее время невозможно установить, какое из этих определений лучше отвечает действительности, поскольку наблюдения не позволяют обнаружить столь тонких эффектов в движении двойных звезд.

13. Оптические эффекты в теории Биркгофа. Распространение света в поле тяготения определяется в рассматриваемой теории законом движения (9,12,2) и условием $ds = 0$, отвечающим требованию СТО. Имея в виду случай центральносимметричного поля, воспользуемся уравнениями движения в форме (9,12,4), поскольку световой луч в таком поле является плоской кривой. Преобразуем эти уравнения, рассматривая пространственные координаты как функции временной переменной t.

С помощью соотношений

$$\dot{x} = Ce^{\frac{m}{r}}\,\frac{dx}{dt};\quad \ddot{x} = C^2e^{\frac{2m}{r}}\left(\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{m}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt}\right),$$

которые непосредственно вытекают из (9,12,3), приведем первое из уравнений движения к следующему виду:

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{mx}{r^3}C^{-2}e^{-\frac{2m}{r}} - \frac{2mx}{r^3}\left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2\right] + \frac{2m}{r^2}\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt}.$$

Для перехода к пределу при $ds \to 0$ достаточно положить $C \to \infty$ и $\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \to 1$. Следовательно, распространение света в центральном поле определяется уравнениями

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{2mx}{r^3} + \frac{2m}{r^3}\frac{dr}{dt}\frac{dx}{dt};$$
$$\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{2my}{r^3} + \frac{2m}{r^3}\frac{dr}{dt}\frac{dy}{dt}. \qquad (9,13,1)$$

Первыми интегралами этой системы служат равенства

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 1;\quad x\dot{y} - y\dot{x} = Ae^{-\frac{2m}{r}},$$