14

Эйнштейновский подход к преобразованиям Лоренца

Описанный в предыдущей главе относительный характер пространственно-временных координат можно сравнить с подобным, уже знакомым нам характером чисто пространственных координат. В процессе измерения пространственных координат каждый наблюдатель может ориентировать свои приборы в любом направлении, так что разные наблюдатели получат для одной и той же точки неодинаковые значения координаты x. Это значит, что координата x — не «абсолютное» свойство точки, а лишь выражение *соотношения* между этой точкой и выбранной системой отсчета. Подобным же образом наблюдатели, движущиеся с разными скоростями, получат неодинаковые значения для «временно́й координаты» данного события, так что эта координата тоже должна соответствовать некоторой взаимосвязи события с системой отсчета и не может быть «абсолютным» свойством рассматриваемого события.

Когда мы говорили о геометрии пространства, то заметили, что, несмотря на «относительность» смысла координат, существуют некоторые преобразования, такие, например, как сдвиги (11.1) и повороты (11.2), позволяющие нам судить о том, что мы имеем дело с одной и той же точкой, даже когда измерения проводились в системах, оси которых были различным образом повернуты относительно друг друга, а начала сдвинуты. Существуют ли аналогичные преобразования для пространственных и временно́й координат, взятых вместе?

Как мы видели в гл. 2, в ньютоновской механике существуют преобразования Галилея (2.3), которые и позволяют соотнести друг с другом пространственно-временные координаты одного и того же события, если их измерять в разных системах отсчета, движущихся относительно друг друга. Мы нашли, однако, что по закону сложения скоростей Галилея измеряемая величина скорости света должна зависеть от скорости движения аппаратуры наблюдателя. Так как это предсказание противоречит опытным фактам, то ясно, что преобразования Галилея не могут быть верны. (Они применимы разве что в качестве приближения, когда скорость света можно считать практически бесконечно большой.)

Наша цель состоит в получении преобразования между системой координат x, y, z, t некоторого события, измеренных в данной системе отсчета A, и другой системой координат x', y', z', t', соответствующих тому же событию, но измеренных в другой системе отсчета B, которая движется относительно системы отсчета A. Чтобы упростить исследование, предположим, что скорость системы B относительно A равна v и направлена вдоль оси z (обобщение на случай произвольно направленной скорости будет совершенно очевидным).

Это преобразование должно соответствовать тому факту, что измеряемая величина скорости света во всех равномерно движущихся системах отсчета равна c. Чтобы выразить это утверждение в математической форме, выберем в качестве начала пространственно-временной системы координат O в обеих системах отсчета событие, соответствующее вспышке света. Тогда в системе A свет за время t должен распространиться до поверхности сферы, определяемой уравнением

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2 = 0. \qquad (14.1)$$

В системе отсчета B фронт световой волны будет также лежать на сферической поверхности

$$c^2t'^2 - x'^2 - y'^2 - z'^2 = 0. \qquad (14.2)$$

Нам нужно найти преобразование, при котором уравнение фронта световой волны остается инвариантным, т. е. преобразование, переводящее уравнение (14.1) в (14.2).

В гл. 9 мы уже видели, что существует преобразование, оставляющее инвариантной величину скорости света; это — *преобразование Лоренца.* К нему, очевидно, можно присовокупить произвольный *пространственный поворот*, ибо он оставляет инвариантной функцию $x^2+y^2+z^2=x'^2+y'^2+z'^2$, а также время $(t'=t)$, поэтому величина $c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ остается также инвариантной. Кроме того, допустимы отражения пространственной и временной осей, $x\to -x'$, $t\to -t'$ и т. д., относительно которых скорость света, конечно, инвариантна.

Теперь естественно спросить, не существует ли каких-либо других преобразований, относительно которых скорость света инвариантна? Ответ: если исходить из физически разумного требования, чтобы наши преобразования не содержали особых точек (т. е. были бы повсюду регулярными и непрерывными), то можно показать, что единственно возможными являются преобразования Лоренца, дополненные сдвигами, поворотами и отражениями.

Следует подчеркнуть, что в эйнштейновской трактовке преобразования Лоренца выводятся не как следствие изменения измерительных приборов при их движении в гипотетическом эфире (именно в силу этого последнего обстоятельства все наблюдатели независимо от своих скоростей будут получать при измерении одну и ту же величину скорости света). Напротив, как уже было отмечено в предыдущих главах, здесь следует исходить из хорошо проверенной опытом гипотезы об инвариантности скорости света, которую мы *измеряем реально.* Это не требует никаких объяснений (например, со ссылкой на изменение приборов в воображаемом эфире), а само становится исходным пунктом для дальнейшего анализа (подобным же образом в ньютоновской механике исходят из законов Ньютона, приняв их в качестве строго проверенной гипотезы, а в электродинамике основываются на законах Фарадея и Ампера). Сделав такой выбор исходной гипотезы, Эйнштейн перешел к доказательству вышеописанным способом, что преобразования Лоренца являются единственными физически допустимыми и не противоречат этой гипотезе.

Запишем снова преобразование Лоренца [см. уравнения (9.1) — (9.3) и (9.5)], выражающее координаты системы B через координаты системы A:

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad t' = \frac{t - (vz/c^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad (14.3)$$
$$x' = x, \qquad y' = y.$$

Обратное преобразование, выражающее координаты системы A через координаты системы B, имеет вид

$$z = \frac{z' + vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad t = \frac{t' + (vz/c^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad (14.4)$$
$$x = x', \qquad y = y'.$$

Заметим, что обратное преобразование получается из прямого заменой v на $-v$. Этого и следовало ожидать, так как если скорость системы B относительно системы A равна v, то скорость системы A относительно системы B равна $-v$. Поэтому мы в действительности пользуемся при переходе от B к A *теми же функциями* самой скорости (учитывая ее знак), что и при переходе от A к B.

Заметим также, что при $v/c \to 0$ (что эквивалентно $c \to \infty$) преобразование Лоренца сводится к преобразованию Галилея

$$z' = z - vt, \qquad t' = t,$$
$$x' = x, \qquad y' = y. \qquad (14.5)$$

Этот факт с определенностью указывает на то, что в эйнштейновских понятиях пространства и времени как предельный случай содержатся прежние пространственно-временные представления, применимые, пока отношение v/c не слишком велико.

Очевидно, что из преобразований Лоренца следует относительность одновременности, длины и промежутков времени, о чем говорилось в предыдущей главе. Например, если наблюдатель, покоящийся в системе B (назовем его наблюдателем B), обнаруживает, что некоторая совокупность событий происходит в его системе отсчета одновременно, в момент $t'=0$, то, как видно из уравнений (14.4), наблюдатель A, покоящийся в системе A, найдет для этих событий $t=vz/c^2$; такие события, конечно, для него не являются одновременными. Точно так же, когда наблюдатель в системе A измеряет длину предмета, движущегося мимо него со скоростью v в направлении оси z, он должен отметить положения обоих концов этого предмета в один и тот же момент времени, измеренного в его системе отсчета, например при $t=0$. Из уравнений (14.3) тогда следует

$$z'=\frac{z}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

или же

$$z=z'\sqrt{1-\left(\frac{v}{c}\right)^2}.$$

Так как v — скорость этого предмета, ясно, что z' — его длина в системе отсчета, в которой этот предмет покоится. Полученные соотношения дают как раз величину известного лоренцева сокращения.

Чтобы разобраться в изменении хода часов, мы будем исходить из системы отсчета B, относительно которой эти часы покоятся, скажем, в точке $z'=0$. Примем их период равным t'. Из уравнений (14.4) получим

$$t=\frac{t'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

— это то самое соотношение, которое выражает эффект замедления хода движущихся часов.

Полученные только что выводы касаются того, как соотносятся показания приборов наблюдателя B и соответствующие им показания приборов наблюдателя A. Вспомним, что переход от системы B к системе A имеет тот же вид, что и переход от системы A к системе B, только v заменяется на $-v$. Из этого замечания следует, что точно таким же образом должны соотноситься показания приборов наблюдателя A и соответствующие им показания приборов наблюдателя B. Это значит, например, что наблюдатель A видит линейки у наблюдателя B сократившимися в длине, в то время как наблюдатель B видит линейки у наблюдателя A также сократившимися в длине.

Как могло оказаться, что каждый из наблюдателей в одно и то же время обнаруживает аналогичное сокращение линеек своего коллеги? Иначе говоря, почему, если наблюдатель *A* утверждает, что линейки у *B* короче, чем у него, наблюдатель *B* не видит, что линейки у *A* длиннее его линеек? Разгадка в том, что, как мы уже видели, измеряя длину какого-либо предмета, наблюдатели *A* и *B* имеют в виду *разные системы событий.* Оценивая по-разному одновременность, *A* считает, что *B* допускает сдвиг линейки в процессе измерения и то, что он меряет, не совпадает с действительной длиной. В точности то же самое скажет и *B* об *A*.

Хотелось бы сравнить эту ситуацию с тем, что происходит, когда два человека *A* и *B* удаляются друг от друга, продолжая видеть один другого. Тогда *A* скажет, что *B* становится все меньше, а *B* скажет, что *A* становится все меньше. Почему же *B* не говорит, что *A* становится больше? Ответ в том, что *каждый видит нечто свое,* а именно изображение мира на сетчатке *своего* глаза. Нет никакого парадокса в том, что изображение человека *A* на сетчатке у *B* становится все меньше соответственно тому, как уменьшается изображение *B* на сетчатке у *A*. Точно так же нет парадокса и в том, что наблюдатель *A* отмечает сокращение линейки наблюдателя *B* и вместе с тем *B* отмечает такое же сокращение линейки у *A*. Каждый из них просто имеет в виду *нечто свое*, когда говорит о длине одного и того же предмета.