15

Сложение скоростей

Раньше мы записывали преобразование Галилея между координатами x', y', z', t' в системе B, движущейся со скоростью v в направлении оси z, и координатами x, y, z, t в покоящейся системе A в виде

$$z' = z - vt, \qquad x' = x, \qquad y' = y, \qquad t' = t. \qquad (15.1)$$

Наблюдая движение какого-либо предмета, имеющего скорость u в направлении оси z, наблюдатель в системе отсчета A скажет, что движение этого предмета описывается уравнением

$$z = ut + z_0.$$

Примем для простоты $z_0 = 0$. Тогда получим

$$u = \frac{z}{t}.$$

Чтобы узнать, что видит наблюдатель в системе отсчета B, применим преобразование Галилея и найдем

$$z' = z - vt = (u - v)\,t = (u - v)\,t'. \qquad (15.2)$$

Следовательно, наблюдатель в системе B припишет движущемуся предмету скорость

$$w = \frac{z'}{t'} = u - v. \qquad (15.3)$$

Конечно, это и есть известный закон сложения скоростей Галилея [см. уравнение (2.3)], который мы теперь вывели более последовательно, чтобы облегчить сравнение с результатами теории Эйнштейна.

Если переход между системами отсчета A и B описывается не преобразованием Галилея, а преобразованием Лоренца, то нужно исходить из уравнений (14.3), выражающих координаты системы B через координаты системы A, а именно

$$z' = \frac{z - vt}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{15.4}$$

В системе отсчета A движение рассматриваемого предмета снова выражается уравнением $z = ut$, как и в том случае, когда мы применяли преобразование Галилея. Поэтому

$$z' = \frac{(u - v)\,t}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}. \tag{15.5}$$

Кроме того, из уравнений (14.3) следует

$$t' = \frac{t - \frac{vz}{c^2}}{\sqrt{1 - (v/c)^2}} = \frac{t\left(1 - \frac{uv}{c^2}\right)}{\sqrt{1 - (v/c)^2}}, \tag{15.6}$$

так что

$$w = \frac{z'}{t'} = \frac{u - v}{1 - \frac{uv}{c^2}}. \tag{15.7}$$

Это и есть релятивистский закон сложения скоростей. Заметим, что при стремлении отношения v/c к нулю выражение (15.7) стремится к закону Галилея

$$w = u - v.$$

Однако в более общем случае полученный закон, очевидно, в корне отличается от закона Галилея. Например, как легко видеть, складывая скорости, меньшие скорости c, никогда нельзя превысить скорость c. Чтобы доказать это утверждение, возьмем преобразование не от системы A к B, а от системы B к A. Из сравнения уравнений (14.3) и (14.4) видно, что это означает просто замену v на $-v$. Отсюда следует

$$W = \frac{u + v}{1 + \frac{uv}{c^2}}. \tag{15.8}$$

Здесь суммарная скорость обозначена прописной буквой, чтобы читатель не смешивал эту формулу с формулой (15.7).

Отсюда видно, что если u и v положительны, то $W<u+v$, следовательно, взяв предмет, движущийся со скоростью u, и рассмотрев его движение в системе отсчета, обладающей скоростью $-v$, мы найдем, что скорость этого предмета не будет равна сумме этих двух скоростей, как казалось бы с точки зрения «здравого смысла». Когда отношение v/c стремится к единице, релятивистские эффекты становятся все более и более очевидными. Чтобы увидеть, к чему это приводит, исследуем величину

$$c^2-W^2=c^2-\frac{(u+v)^2}{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2}=c^2\frac{[1-(u/c)^2]\,[1-(v/c)^2]}{\left(1+\frac{uv}{c^2}\right)^2}. \quad (15.9)$$

Пока $u^2/c^2<1$ и $v^2/c^2<1$, разность c^2-W^2 положительна и $|W|<c$. Поэтому, складывая две скорости, меньшие c, невозможно получить скорость, равную скорости света. [Возьмем, например, $u=0{,}9c$ и $v=0{,}9c$, тогда $W/c=1{,}8/(1+0{,}9\cdot 0{,}9)=1{,}8/1{,}81<1$.] Взяв же $u=c$, получим

$$W=\frac{v+c}{1+(v/c)}=c,$$

откуда видно, что скорость света будет иметь в новой системе отсчета ту же величину, что и в старой.

Проведенная дискуссия показывает, что скорость света является тем пределом, к которому могут лишь стремиться скорости материальных тел, но они не могут ни достигнуть, ни превзойти его. Возьмем, например, космический корабль. Пусть двигатель дает ему серию импульсов, каждый из которых *в системе отсчета, связанной с космическим кораблем*, приводит к изменению его скорости на величину Δv. Из релятивистского закона сложения скоростей следует, что сколько бы мы ни ускоряли таким образом наш корабль, он никогда не достигнет скорости света, хотя бы мы сожгли сколь угодно большое, но конечное количество горючего. (В одной из последующих глав мы снова придем к этому же выводу из других соображений, показав, что наш корабль не может достичь скорости света, так как величина его массы при этом стремится к бесконечности и по мере приближения его скорости к скорости света ускорять его становится все труднее.)

Мы рассматривали до сих пор сложение лишь параллельных друг другу скоростей, так что задача сводилась к одномерному случаю. Однако наши выводы очень просто распространить на случай трех измерений. Возьмем для этого в системе отсчета A предмет, скорость которого имеет компоненты u_x, u_y, u_z, так что его движение описывается уравнениями

$$x = u_x t, \qquad y = u_y t, \qquad z = u_z t.$$

Рассмотрим преобразование Лоренца для скорости v (которую всегда можно ориентировать вдоль оси z, повернув соответствующим образом систему координат). Тогда мы получим

$$\begin{aligned} u'_z &= \frac{z'}{t'} = \frac{u_z - v}{1 - \frac{u_z v}{c^2}}, \\ u'_x &= \frac{x'}{t'} = \frac{u_x \sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - \frac{u_z v}{c^2}}, \\ u'_y &= \frac{y'}{t'} = \frac{u_y \sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - \frac{u_z v}{c^2}}. \end{aligned} \qquad (15.10)$$

В векторной записи эти соотношения удобно представить в виде

$$\mathbf{u}' = \frac{\sqrt{1-(v/c)^2}}{1 - \frac{\mathbf{uv}}{c^2}}(\mathbf{u} - \mathbf{v}_0(\mathbf{uv}_0)) + \frac{\mathbf{v}_0(\mathbf{uv}_0)}{1 - \frac{\mathbf{uv}}{c^2}}, \qquad (15.11)$$

где $\mathbf{v}_0$ — единичный вектор в направлении скорости $\mathbf{v}$.

Иногда бывает удобно представить в векторной записи сами преобразования Лоренца. Тогда получим

$$\begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} - \mathbf{v}_0(\mathbf{xv}_0) + \frac{\mathbf{v}_0(\mathbf{xv}_0) - \mathbf{v}t}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \\ t' &= \frac{t - \frac{\mathbf{xv}}{c^2}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \end{aligned} \qquad (15.12)$$