18

Импульс и масса в теории относительности

На основании уравнения (16.2) мы заключили, что законы движения Ньютона не инвариантны относительно преобразований Лоренца, а потому, согласно принципу относительности, их нельзя считать истинными законами механики (кроме того случая, когда отношение $v/c \ll 1$. В соответствии с представлениями, изложенными в гл. 15 и 16, мы должны в первую очередь обобщить эти законы так, чтобы получить новую систему уравнений, инвариантную при преобразованиях Лоренца.

Производя такое обобщение, удобно записать законы Ньютона через импульс $\mathbf{p}$ рассматриваемого тела. Тогда они примут вид

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \mathbf{F}, \tag{18.1}$$

где

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} \tag{18.2}$$

и

$$\frac{dm}{dt} = 0 \quad \text{(постоянство массы).} \tag{18.3}$$

Полный импульс $\mathbf{P}$ и полная масса M системы тел определяются формулами

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i, \qquad M = \sum_{i=1}^{N} m_i, \tag{18.4}$$

где m_i — масса i-й частицы, а $\mathbf{v}_i$ — ее скорость. Скорость центра масс системы тел при этом равна

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{M}. \tag{18.5}$$

В механике Ньютона хорошо известна теорема, утверждающая, что полный импульс изолированной системы удовлетворяет уравнению

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = 0,$$

т. е. **P** — постоянный вектор. Из равенства (18.3) также следует, что полная масса такой системы неизменна.

Эти законы сохранения импульса и массы по своей форме, очевидно, много проще уравнений Ньютона, и поэтому их, по-видимому, гораздо легче обобщить. Выполнив такое обобщение, мы обратимся к релятивизации самих законов Ньютона (в гл. 21).

Основная идея нашего подхода заимствована по существу из физических теорий, когда при анализе физической системы ее разбивают на части или на компоненты. В теории сплошных сред, например в гидродинамике, мы рассматриваем жидкость как состоящую из малых по объему элементов, а в теории дискретного атомного строения вещества подобным же образом считаем, что система состоит из малых элементов, в качестве которых теперь берутся атомы. В обоих этих случаях *полный импульс* системы представляется в виде суммы импульсов ее частей. То же самое относится к полной массе и к полной энергии системы. Кроме того, по крайней мере в границах применимости теории Ньютона, и эксперимент, и теория показывают, что эти системы подчиняются законам сохранения импульса, массы и энергии.

Ввиду существования таких законов сохранения полный импульс и массу (а также энергию) системы можно рассматривать не только как суммы соответствующих характеристик всех частей этой системы, но и как *единое целое*, причем в случае изолированной системы их значение остается неизменным. Важно, что поведение этих полных величин не зависит от изменений, которым подвергаются отдельные части физической системы в ходе весьма сложных взаимодействий. Именно на этом основании можно рассматривать отдельные материальные тела как простые макроскопические объекты, игнорируя неизвестные нам и не поддающиеся описанию сложные особенности движения составляющих их молекул.

Ясно, что возможность рассматривать материальные тела как в виде суммы составляющих их частей, так и в виде единого целого, является универсальным свойством объектов нашего мира. Значит, это свойство должно быть отражено в любой системе законов механики, которую мы будем строить, если требуется, чтобы эти законы полностью соответствовали *всем* известным опытным фактам.

Свойства, описанные выше, были впервые установлены в нерелятивистской теории. Однако, согласно принципу относительности, основные физические свойства системы не зависят от движения этой системы относительно наблюдателя. Поэтому следует считать, что эту систему можно продолжать рассматривать и как целое, и как совокупность ее частей, и при этом будут выполняться те же самые законы сохранения, если даже эта физическая система будет двигаться с большой скоростью относительно лабораторной системы отсчета. Мы увидим, что это требование вместе с законом преобразования Лоренца от одной системы отсчета к другой достаточно для вывода правильных релятивистских выражений для импульса, массы и энергии.

Чтобы придать обсуждавшимся выше представлениям математический вид, запишем прежде всего полный импульс системы $\mathbf{P}$ в виде суммы импульсов $\mathbf{p}_i = m_i \mathbf{v}_i$ ее составных частей:

$$\mathbf{P} = \sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i, \tag{18.6}$$

где $\mathbf{v}_i$ — скорость i-й частицы в системе из N частиц, а m_i — масса i-й частицы. При этом полная масса системы равна

$$M = \sum_{i=1}^{N} m_i. \tag{18.7}$$

Если можно продолжать рассматривать систему частиц как образующую единое целое, то необходимо, чтобы эта система обладала «общей скоростью», которую мы обозначим через **V**, так что полный импульс системы будет выражаться формулой

$$\mathbf{P} = M\mathbf{V}.$$

Тогда

$$\mathbf{V} = \frac{\mathbf{P}}{M} = \frac{\sum_{i=1}^{N} m_i \mathbf{v}_i}{\sum_{i=1}^{N} m_i}, \tag{18.8}$$

очевидно, представляет собой среднюю скорость, в которую каждая частица системы вносит вклад соответственно своей массе.

В нерелятивистской механике вектор **V** *также* описывает скорость центра масс системы. Однако оказывается, что в теории относительности понятие центра масс сложнее и не обладает столь же отчетливым физическим смыслом, как в нерелятивистской теории. (Причина этого заключается в том, что в релятивистской физике нет универсального «центра масс» как точки, которая не зависела бы от выбора системы отсчета[1].) Тем не менее, определив **V** как среднюю (с соответствующими весовыми коэффициентами) скорость, можно надеяться, что она будет обладать должными свойствами и характеризовать скорость всей системы в целом.

Мы приступим теперь к выводу релятивистских выражений для массы и импульса как функций скорости. Это удобно сделать, рассматривая систему двух частиц вначале в системе отсчета B, где скорость центра масс равна нулю. Ограничимся сейчас одномерным случаем (обобщение на случай трех измерений проведем позднее). Если массы частиц равны m_1 и m_2, а скорости соответствуют v_1 и v_2, то полный импульс системы имеет вид

$$P = m_1 v_1 + m_2 v_2 = 0. \tag{18.9}$$

Так как полная масса при этом равна

$$M = m_1 + m_2, \tag{18.10}$$

[1]) Этот вопрос обсуждался Мёллером [C. Möller, Ann. Inst. Henri Poincaré, 11, 251 (1949)].

то скорость центра масс, по определению, можно записать в виде

$$V = \frac{P}{M} = 0. \tag{18.11}$$

Рассмотрим теперь эту же систему двух частиц в другой системе отсчета A, в которой скорость центра масс равна V' (направлена также вдоль оси z). Пусть в этой новой системе отсчета массы наших частиц равны m_1' и m_2', а скорости равны v_1' и v_2'. При этом из принципа относительности следует, что в системе отсчета A нашу систему можно представить в виде суммы ее частей, так же как мы это делали в системе отсчета B. Поэтому и полный импульс частиц можно записать в виде суммы

$$P' = m_1'v_1' + m_2'v_2'. \tag{18.12}$$

Подобным же образом выражается и полная масса системы:

$$M' = m_1' + m_2'. \tag{18.13}$$

Вспомним, что в системе отсчета B, где скорость центра масс была равна нулю, мы могли также рассматривать нашу систему как единое целое, обладающее массой $M = m_1 + m_2$ и общей скоростью V (равной в этом случае нулю). Согласно принципу относительности, к этой системе частиц можно подойти точно так же и в системе отсчета A, поэтому

$$P' = M'V'. \tag{18.14}$$

Из соотношения (18.9) следует

$$\frac{m_1}{m_2} = -\frac{v_2}{v_1}. \tag{18.15}$$

На основании (18.12) — (18.14) получим

$$m_1'v_1' + m_2'v_2' = (m_1' + m_2')V', \tag{18.16}$$

откуда

$$\frac{m_1'}{m_1'} = -\frac{V' - v_2'}{V' - v_1'}. \tag{18.17}$$

Релятивистский закон сложения скоростей (15.8) дает

$$v_1' = \frac{v_1 + V'}{1 + \frac{v_1 V'}{c^2}}, \qquad v_2' = \frac{v_2 + V'}{1 + \frac{v_2 V'}{c^2}}. \tag{18.18}$$

Подставляя эти выражения в (18.17), после несложных вычислений находим

$$\frac{m_1'}{m_2'} = -\frac{1 + \frac{v_1 V'}{c^2}}{1 + \frac{v_2 V'}{c^2}} \frac{v_2}{v_1} \tag{18.19}$$

и, учитывая соотношение (18.15), получаем

$$\frac{m_1'}{m_2'} = \frac{1 + \frac{v_1 V'}{c^2}}{1 + \frac{v_2 V'}{c^2}} \frac{m_1}{m_2}. \tag{18.20}$$

Этот результат удобнее представить в виде

$$\frac{m_1'/m_1}{m_2'/m_2} = \frac{1 + \frac{v_1 V'}{c^2}}{1 + \frac{v_2 V'}{c^2}}. \tag{18.21}$$

Нетрудно, однако, получить и другое выражение для правой части этого равенства. Для этого рассмотрим сначала закон преобразования величины $\beta = \sqrt{1 - (v_1'/c)^2}$. Напишем прежде всего

$$\beta = \sqrt{1 - (v_1'/c)^2} = \sqrt{1 - \frac{(v_1 + V')^2}{c^2 [1 + (v_1 V'/c^2)]^2}} =$$

$$= \frac{\sqrt{1 - (V'/c)^2} \sqrt{1 - (v_1/c)^2}}{1 + (v_1 V'/c^2)}, \tag{18.22}$$

откуда следует

$$\frac{m_1'/m_1}{m_2'/m_2} = \frac{\sqrt{1 - (v_1/c)^2} / \sqrt{1 - (v_1'/c)^2}}{\sqrt{1 - (v_2/c)^2} / \sqrt{1 - (v_2'/c)^2}} = \frac{R(v_1, v_1')}{R(v_2, v_2')}, \tag{18.23}$$

где использованы обозначения

$$R(v_1, v_1') = \frac{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}{\sqrt{1-(v_1'/c)^2}},$$
$$R(v_2, v_2') = \frac{\sqrt{1-(v_2/c)^2}}{\sqrt{1-(v_2'/c)^2}}. \tag{18.24}$$

Заметим теперь, что соотношение (18.23) должно выполняться при *произвольных* v_1, v_1', v_2 и v_2'[1]). Тогда в эквивалентном ему равенстве

$$\frac{m_1'/m_1}{R(v_1, v_1')} = \frac{m_2'/m_2}{R(v_2, v_2')} \tag{18.25}$$

левая часть содержит лишь величины, относящиеся к первой частице, тогда как в правой части фигурируют лишь характеристики второй частицы. Ввиду произвольного выбора скоростей каждой из этих двух частиц равенство (18.25) имеет смысл лишь в том случае, если обе его стороны равны одной и той же постоянной K, не зависящей от величин, фигурирующих в этом равенстве. Иными словами,

$$\frac{m_1'}{m_1} = KR(v_1, v_1') = K\frac{\sqrt{1-(v_1/c)^2}}{\sqrt{1-(v_1'/c)^2}}, \tag{18.26}$$

$$\frac{m_2'}{m_2} = KR(v_2, v_2') = K\frac{\sqrt{1-(v_2/c)^2}}{\sqrt{1-(v_2'/c)^2}}. \tag{18.27}$$

В частном случае, когда $v_1 = 0$, имеем

$$\frac{m_1'}{m_1} = \frac{K}{\sqrt{1-(v_1'/c)^2}}. \tag{18.28}$$

При этом m_1 является массой частицы, когда последняя покоится. Но это и есть обычная масса, фигурирующая в нерелятивистских уравнениях движения Ньютона

[1]) Далее в оригинале приведен без всякой необходимости усложненный расчет, который в переводе упрощен. — *Прим. перев.*

(справедливых, когда отношение v/c стремится к нулю). Обозначим эту массу покоя через m_{10}. Тогда

$$m_1' = \frac{Km_{10}}{\sqrt{1-(v_1'/c)^2}}. \tag{18.29}$$

Перейдем теперь к более частному случаю, когда $v_1'=0$. Мы должны получить при этом $m_1'=m_{10}$, откуда следует, что $K=1$. Очевидно, что такой же вывод можно получить и для второй частицы. Следовательно, для каждой из наших частиц выполняется соотношение

$$m(v) = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{18.30}$$

При этом импульс частицы будет равен

$$p = mv = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{18.31}$$

Мы получили, таким образом, релятивистские выражения для массы и импульса. Заметим, что масса зависит от скорости и не является постоянной, какой она была в теории Ньютона.

Полученные результаты легко распространить на случай системы N частиц. Сначала можно применить их к любым двум частицам из этой системы и говорить о них как о единой подсистеме с полной массой $M=m_1+$ $+m_2$, полным импульсом $P=p_1+p_2$ и общей скоростью $V=P/M$. Эту подсистему можно затем рассматривать как отдельную частицу и, комбинируя ее с третьей частицей, получить новую пару, к которой применить все только что сформулированные процедуры. Теперь мы уже рассматриваем три частицы как единое целое. По индукции описанный процесс можно продолжать до тех пор, пока мы не включим всех частиц рассматриваемой системы. При этом нетрудно показать, что если соотношения (18.30) и (18.31) справедливы для каждой частицы, то всю систему можно разложить релятивистски инвариантным образом на любые комбинации своих частей, т. е. так, что это разложение будет иметь место во всех системах отсчета, связанных между собой преобразованиями Лоренца.

Отсюда следует, что в *каждой* системе отсчета будет справедлива одна и та же связь между величинами в определениях полной массы и полного импульса:

$$M = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}}, \qquad P = \sum_{i=1}^{N} \frac{m_{0i} v_i}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}}. \tag{18.32}$$

Если частицы друг с другом взаимодействуют, то массы и импульсы отдельных частиц могут, вообще говоря, изменяться. Из нерелятивистской механики известно, что *полные* масса и импульс системы сохраняются, даже если эти характеристики отдельных ее частей изменяются в результате взаимодействия. Нетрудно найти релятивистское обобщение этих свойств в том смысле, что если полная масса или полный импульс сохраняются в какой-либо лоренцевой системе отсчета, то они будут сохраняться и в любой другой такой системе. Для доказательства обратимся к соотношению (18.22) и запишем с его помощью массу i-й частицы в штрихованной системе отсчета:

$$\begin{gathered} m_i' = \frac{m_{0i}}{\sqrt{1-(v_i'/c)^2}} = \frac{m_{0i}(1+v_i V'/c^2)}{\sqrt{1-(v_i/c)^2}\,\sqrt{1-(V'/c)^2}} = \\ = \frac{m_i + p_i V'}{\sqrt{1-(V'/c)^2}}, \\ M' = \sum_{i=1}^{N} m_i' = \frac{1}{\sqrt{1-(V'/c)^2}} \sum_{i=1}^{N}\left(m_i + \frac{p_i V'}{c^2}\right). \end{gathered} \tag{18.33}$$

Здесь m_i — масса i-й частицы в нештрихованной системе, а p_i — ее импульс. Если в нештрихованной системе полная масса $\sum_i m_i$ и полный импульс $\sum_i p_i$ сохраняются, то (из постоянства V') следует, что полная масса $\sum_i m_i'$ в штрихованной системе также сохраняется. Тогда из соотношения (18.14) следует, что в этой последней системе отсчета сохраняется и полный импульс

$$P' = M'V'.$$

Чтобы лучше разобраться в сущности релятивистских законов сохранения, рассмотрим в качестве примера столкновение двух частиц. Пусть массы и скорости этих частиц до и после столкновения соответственно равны m_1^A, m_2^A, v_1^A, v_2^A и m_1^B, m_2^B, v_1^B, v_2^B. Если эти частицы движутся настолько медленно, что к ним применима нерелятивистская механика, то известно, что имеют место равенства

$$m_1^A v_1^A + m_2^A v_2^A = m_1^B v_1^B + m_2^B v_2^B \tag{18.34}$$

(закон сохранения полного импульса)

и

$$m_1^A = m_1^B, \qquad m_2^A = m_2^B \tag{18.35}$$

(постоянство массы каждой частицы).

Рассмотрим теперь этот процесс столкновения в другой системе отсчета, где скорость центра масс частиц велика. Из анализа, проведенного в этой главе, видно, что закон сохранения полного импульса (18.34) будет справедлив и в новой системе, если взять новые значения массы и импульса частиц, согласно формулам (18.30) и (18.31). Однако вместо равенств (18.35), выражающих постоянство масс отдельных частиц, мы получим теперь

$$m_1^A + m_2^A = m_1^B + m_2^B, \tag{18.36}$$

т. е. закон сохранения *полной массы* системы, тогда как индивидуальные массы частиц, вообще говоря, будут изменяться [как и должно быть, согласно формуле (18.30), так как масса частицы зависит от ее скорости, а последняя изменяется в результате столкновения].

Все выводы, полученные до сих пор, основывались на предположении, что движение происходит в направлении оси z. Однако при анализе этих проблем в случае трех измерений получаются по существу те же самые результаты, что легко увидеть при более подробных расчетах, которые мы здесь опустим. Для массы сохраняется соотношение, подобное (18.30), лишь с той разницей, что под v следует понимать абсолютную величину вектора скорости частицы, так что $v^2 = v_x^2 + v_y^2 + v_z^2$, где v_x, v_y, v_z — компоненты этого вектора.

У импульса теперь будет тоже три компоненты. Поэтому в векторных обозначениях можно записать

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{18.37}$$

и

$$\mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{18.38}$$

При этом сохраняются как полная масса изолированной физической системы, так и все компоненты ее полного импульса.

Полученная зависимость массы от скорости, конечно, совпадает с предсказываемой в теории Лоренца, где она была следствием «противодействующей э. д. с.», которая действует на электрон и возникает в результате изменения магнитного поля, происходящего при ускорении этого электрона (см. гл. 6).

Стоя на эйнштейновских позициях, мы не отрицаем, что масса электрона может быть частично или даже целиком электромагнитного происхождения. Тем не менее мы не ставим определение взаимосвязи между массой и скоростью в зависимость от выбора конкретной модели электрона, как это было в теории Лоренца. Напротив, мы видим, что масса *независимо от своего происхождения* должна проявлять именно такую зависимость от скорости, если рассмотренные в этой главе общие свойства законов физики обладают релятивистской инвариантностью, т. е. не изменяют своего вида во всех системах отсчета, связанных преобразованиями Лоренца.