20

Релятивистский закон преобразования энергии и импульса

Мы уже видели в предыдущих главах, что импульс и энергия каждого объекта (равно как и его масса, пропорциональная этой энергии) зависят от скорости этого объекта и выражаются формулами

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}=\frac{E_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \tag{20.1}$$

$$\mathbf{p}=\frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{20.2}$$

Предположим, что нам известны значения E и $\mathbf{p}$ в данной системе отсчета A. Можно ли указать преобразование, аналогичное преобразованию Лоренца для $\mathbf{x}$ и t, которое давало бы значения E' и $\mathbf{p}'$, измеренные в новой системе B, движущейся относительно A со скоростью $\mathbf{V}$?

Для простоты ограничимся одномерным случаем (направим все скорости вдоль оси z). Значения E и $\mathbf{p}$ в системе A заданы. Требуется вычислить в системе отсчета B соответствующие значения E' и $\mathbf{p}'$. Примем скорость тела равной v в системе A и v' в системе B.

Здесь удобно использовать соотношение (18.22). Заметим, однако, что в формулах (18.15), (18.17) и (18.19) через v' обозначена скорость объекта, измеренная в системе, движущейся со скоростью $V'=-V$ относительно системы отсчета A. Взяв обратные значения величин, стоящих в обеих сторонах соотношения (18.22), и подставив $V'=-V$, получим

$$\frac{1}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}=\frac{1-(vV/c^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{20.3}$$

Так как

$$E' = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v'/c)^2}}, \qquad E = \frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

и

$$p = \frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

то

$$E' = \frac{E - Vp}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{20.4}$$

Если теперь учесть релятивистский закон сложения скоростей

$$v' = \frac{v - V}{1-(vV/c^2)},$$

то получим

$$p' = \frac{m_0v'}{\sqrt{1-(v'/c)^2}} = \frac{m_0(v-V)}{\sqrt{1-(V/c)^2}\sqrt{1-(v/c)^2}} = \frac{p-(VE/c^2)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}. \tag{20.5}$$

Соотношения (20.4) и (20.5) по существу повторяют форму уравнений преобразования Лоренца (14.3), но здесь вместо z стоит p, а вместо t стоит E/c^2. Следовательно, энергию и импульс тела в одной системе отсчета можно найти, исходя из значений его энергии и импульса в другой системе, с помощью преобразований, подобных преобразованиям Лоренца.

Это рассуждение без труда обобщается на случай трех измерений. Как и для координат x и y, мы здесь имеем

$$p'_x = p_x, \qquad p'_y = p_y. \tag{20.6}$$

В векторных обозначениях полученные преобразования принимают вид

$$E' = \frac{E-(\mathbf{V}\mathbf{p})}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{20.7}$$

$$\mathbf{p}' = \mathbf{p} - (\mathbf{p}\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 + \frac{(\mathbf{p}\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 - (\mathbf{V}E/c^2)}{\sqrt{1-(V/c)^2}}, \tag{20.8}$$

где $\mathbf{V}_0$ — единичный вектор в направлении $\mathbf{V}$.

Из вышеизложенного следует, что доказательство инвариантности выражения (9.7) для квадрата интервала

$s^2=c^2t^2-x^2-y^2-z^2$ относительно преобразований Лоренца аналогично доказательству подобной же инвариантности величины $E^2-c^2p^2$.

Для выяснения смысла этой величины определим ее значение в той системе отсчета, где рассматриваемое тело покоится, так что $\mathbf{p}=0$. Тогда

$$E^2-c^2p^2=E_0^2=m_0^2c^4.$$

Однако в силу инвариантности выражения $E^2-c^2p^2$ его значение должно быть одинаково во всех системах отсчета, и поэтому вообще

$$E^2-c^2p^2=m_0^2c^4. \qquad (20.9)$$

Особенно интересен случай, когда масса покоя равна нулю. При этом

$$E^2-c^2p^2=0. \qquad (20.10)$$

Если взять ось z, совпадающую по направлению с импульсом $\mathbf{p}$, то

$$E=\pm cp_z. \qquad (20.11)$$

Любопытно, что из теории относительности следует возможность существования отличных от нуля энергии и импульса у частицы с равной нулю массой покоя. Чтобы понять смысл этого утверждения, возьмем частицу с очень малой массой покоя m_0 и будем затем устремлять m_0 к нулю. Если скорость частицы равна v, то ее энергия и импульс имеют вид

$$E=\frac{m_0c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad p=\frac{m_0v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \qquad (20.12)$$

При постоянном и меньшем единицы значении v/c величины E и p стремятся к нулю при стремлении к нулю m_0. Если же мы будем устремлять v/c к единице при стремлении m_0 к нулю так, чтобы отношение $m_0/\sqrt{1-(v/c)^2}$ оставалось равным постоянной величине R, мы получим

$$E\to Rc^2, \qquad p\to Rc, \qquad E^2-c^2p^2\to 0 \qquad (20.13)$$

в согласии с (20.10). Следовательно, имея равную нулю массу покоя, тело может обладать отличными от нуля энергией и импульсом *в том и только в том случае, если оно движется со скоростью света.*

Можно подойти к этому вопросу и с другой стороны. Если $m_0 \neq 0$, то при ускорении такой частицы до скорости света ее энергия

$$E = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

и импульс

$$p = \frac{m_0 v}{\sqrt{1-(v/c)^2}}$$

обращаются в бесконечность. Так как реально доступными могут быть только конечная энергия и конечный импульс, наша частица в действительности никогда не сможет достичь скорости света. Если же $m_0 = 0$, то, как мы видели, частица, двигаясь со скоростью c, может обладать конечными энергией и импульсом.

Следовательно, заключение о том, что никакой объект не может обладать скоростью света, приложимо лишь к объектам с отличной от нуля массой покоя. Объект же, у которого отсутствует масса покоя, может находиться *лишь* в состоянии движения со скоростью света. Поэтому можно сказать, что, хотя ничто не может быть *ускорено* до скорости света, могут быть объекты, движущиеся со скоростью света. Это движение не будет результатом предшествующего ускорения, а будет вообще единственным состоянием, в котором эти объекты могут существовать.

Физический смысл движения со скоростью света будет обсуждаться позднее.