21

Заряженные частицы в электромагнитном поле

Ранее мы уже установили, что релятивистские выражения для энергии, массы и импульса резко отличаются от используемых в теории Ньютона и сводятся к последним лишь в пределе $v/c \to 0$. Для изолированной системы релятивистские законы движения выражаются уравнениями

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = 0, \qquad \mathbf{p} = m\mathbf{v} = \frac{m_0\mathbf{v}}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{21.1}$$

К ним следует еще добавить закон сохранения массы. В теории Ньютона он содержался в предположении, что массы всех частиц, входящих в состав системы, постоянны, т. е. $dm_i/dt = 0$ [уравнение (18.3)], где m_i — масса i-й частицы. В теории Эйнштейна масса каждой частицы может, однако, изменяться. При этом масса и энергия эквивалентны друг другу согласно соотношению $E = mc^2$. Поэтому законы сохранения полной массы

$$M = \sum_i m_i$$

и полной энергии

$$E = \sum_i E_i = \sum_i m_i c^2,$$

изолированной физической системы — это в сущности один и тот же закон в том смысле, что один вытекает из другого.

Как нерелятивистский закон $dm_i/dt = 0$, так и нерелятивистское выражение для сохранения полной энергии системы заменяются законом сохранения $dM/dt=0$, или, что то же самое, $dE/dt=0$.

Мы обобщим теперь эти законы на случай неизолированной системы, т. е. такой физической системы, на которую действует результирующая внешняя сила $\mathbf{F}$. Для простоты рассмотрим систему, состоящую всего из одного тела, которое движется со скоростью $\mathbf{v}$. Тогда в качестве соответствующих этому случаю релятивистских законов мы, естественно, предположим соотношения

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt}=\mathbf{F} \tag{21.2}$$

и

$$\frac{dE}{dt}=(\mathbf{F}\mathbf{v}). \tag{21.3}$$

Их *вид* совпадает с *видом* соответствующих соотношений в теории Ньютона. Физический смысл здесь будет, однако, другим, так как $\mathbf{p}$ и E определяются теперь релятивистскими выражениями

$$\mathbf{p}=m\mathbf{v} \quad \text{и} \quad E=mc^2,$$

где

$$m=\frac{m_0}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

а не выражениями из теории Ньютона.

Вместе с тем ясно, что для получения уравнений движения, инвариантных по форме во всех лоренцевых системах отсчета (т. е. имеющих один и тот же вид в этих системах), недостаточно дать релятивистские определения величинам $\mathbf{p}$ и E. Необходимо еще определить силу $\mathbf{F}$ таким образом, чтобы она выражала одну и ту же взаимосвязь независимо от скорости движения системы отсчета. Сделать это, однако, невозможно до тех пор, пока мы не конкретизируем выражение для этой силы, взяв, например, силу, вызванную электромагнитным полем, тяготением или ядерными взаимодействиями. Мы будем обсуждать в этой книге только электромагнитные силы и подробно покажем, что они приведут к инвариантным выражениям для уравнений движения. Можно, однако, утверждать, что все виды сил, свойства которых нам известны, можно выразить таким образом, чтобы они приводили к подобным инвариантным уравнениям движения. Доказательство этого утверждения выходит за рамки настоящей работы [1]).

Сила, действующая на тело, обладающее зарядом q, со стороны электрического и магнитного полей, напряженности которых соответственно равны $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, дается выражением

$$\mathbf{F} = q\left(\mathcal{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathcal{H}\right]\right). \tag{21.4}$$

Имея в виду, что

$$(\mathbf{v}\,[\mathbf{v}\mathcal{H}]) \equiv 0,$$

легко получить лоренцевские уравнения движения для заряженного тела:

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = q\left(\mathcal{E} + \left[\frac{\mathbf{v}}{c}\mathcal{H}\right]\right), \tag{21.5}$$

$$\frac{dE}{dt} = q\,(\mathcal{E}\mathbf{v}). \tag{21.6}$$

Для наших целей удобнее переписать их в дифференциальной форме, заменив $\mathbf{v}$ на $d\mathbf{x}/dt$:

$$d\mathbf{p} = q\left(\mathcal{E}\,dt + \frac{1}{c}\,[d\mathbf{x}\mathcal{H}]\right), \tag{21.7}$$

$$dE = q\,(\mathcal{E}\,d\mathbf{x}), \tag{21.8}$$

где $d\mathbf{x}$ — вектор, на который перемещается тело за промежуток времени dt.

Впервые приведенные выше законы были найдены для случая систем отсчета, в которых скорость движения электрона $\mathbf{v}$ была мала по сравнению со скоростью света c. Нас интересуют здесь, однако, условия выполнения этих законов независимо от скорости движения системы отсчета. Другими словами, пусть уравнения (21.7) и (21.8) справедливы в некоторой системе отсчета A; требуется найти, как должны быть связаны новые

[1]) Существуют, правда, такие силы (среди которых следует упомянуть силы, действующие между атомными ядрами), которые остаются пока настолько непонятными, что в этом отношении о них почти ничего нельзя сказать. Тем не менее сейчас нет оснований предполагать, что они могут привести к уравнениям движения, *не инвариантным* относительно преобразований Лоренца.

величины $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{H}'$, наблюдаемые в другой системе отсчета B, с $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, чтобы в системе B уравнения движения имели тот же вид, что и в A, когда они выражены в соответствующих новых переменных. Итак, мы приняли

$$d\mathbf{p}' = q\left(\mathcal{E}'\,dt' + \frac{1}{c}\,[d\mathbf{x}'\mathcal{H}']\right) \tag{21.9}$$

и

$$dE' = q\,(\mathcal{E}'\,d\mathbf{x}'). \tag{21.10}$$

Выразим $d\mathbf{p}'$ и dE' через $d\mathbf{p}$ и dE согласно преобразованиям Лоренца (20.7) и (20.8), а $d\mathbf{x}'$ и dt' — через $d\mathbf{x}$ и dt согласно аналогичным преобразованиям (15.12). Для этого возьмем дифференциалы соответствующих равенств, приняв $\mathbf{V}$ и $\mathbf{V}_0$ за постоянные. Используя обозначение

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1-(V/c)^2}},$$

получим

$$d\mathbf{p} + (\gamma-1)(\mathbf{V}_0\,d\mathbf{p})\,\mathbf{V}_0 - \frac{\gamma\mathbf{V}}{c^2}\,dE = q\gamma\mathcal{E}'\left(dt - \left(\mathbf{V}\frac{d\mathbf{x}}{c^2}\right)\right) + \\ + \frac{q}{c}(\gamma-1)(\mathbf{V}_0\,d\mathbf{x})\,[\mathbf{V}_0\mathcal{H}'] + \frac{q}{c}\,\gamma\,dt\,[\mathbf{V}\mathcal{H}'], \tag{21.11}$$

$$\gamma(dE - \mathbf{V}\,d\mathbf{p}) = q\,(\mathcal{E}'\,d\mathbf{x}) + q\,(\gamma-1)(\mathcal{E}'\,\mathbf{V}_0)(\mathbf{V}_0\,d\mathbf{x}) - \\ - q\gamma(\mathcal{E}'\mathbf{V})\,dt. \tag{21.12}$$

Подставляя сюда выражения (21.7) и (21.8) для dE и $d\mathbf{p}$, находим

$$d\mathbf{p} + (\gamma-1)(\mathbf{V}_0\,d\mathbf{p})\,\mathbf{V}_0 - \frac{\gamma\mathbf{V}\,dE}{c^2} = q\left(\mathcal{E}\,dt + \frac{1}{c}\,[d\mathbf{x}\mathcal{H}]\right) + \\ + q\,(\gamma-1)\left\{(\mathbf{V}_0\mathcal{E})\,dt + \left(\mathbf{V}_0\,\frac{1}{c}\,[d\mathbf{x}\mathcal{H}]\right)\right\}\mathbf{V}_0 - \frac{\gamma}{c^2}\,\mathbf{V}\,(\mathcal{E}\,d\mathbf{x}), \tag{21.13}$$

$$\gamma(dE - (\mathbf{V}\,d\mathbf{p})) = q\gamma\left\{(\mathcal{E}\,d\mathbf{x}) - (\mathbf{V}\mathcal{E})\,dt - \left(\frac{\mathbf{V}}{c}\,[d\mathbf{x}\,\mathcal{H}]\right)\right\}. \tag{21.14}$$

Учитывая тождество

$$(\mathbf{V}\,[d\mathbf{x}\mathcal{H}]) \equiv -([\mathbf{V}\mathcal{H}]\,d\mathbf{x}),$$

легко привести комбинацию уравнений (21.11) и (21.12) к виду

$$\left(\left\{\mathcal{E}' + (\gamma - 1)(\mathcal{E}'\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 - \gamma\mathcal{E} + \gamma\left[\frac{\mathbf{V}}{c}\mathcal{H}\right]\right\}d\mathbf{x}\right) - \\ - \gamma((\mathcal{E}' - \mathcal{E})\mathbf{V})\,dt = 0. \quad (21.15)$$

Полученное соотношение должно быть справедливым при любых скоростях частицы $\mathbf{v}=d\mathbf{x}/dt$, так что оно не должно зависеть от выбора $d\mathbf{x}$ и dt. Читатель без труда проверит, что это возможно лишь в том случае, когда коэффициенты при $d\mathbf{x}$ и dt по отдельности обращаются в нуль, т. е. когда

$$((\mathcal{E}' - \mathcal{E})\mathbf{V}) = 0,$$

$$\mathcal{E}' - \gamma\mathcal{E} - (\mathcal{E}'\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 + \gamma(\mathcal{E}'\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 + \gamma\left[\frac{\mathbf{V}}{c}\mathcal{H}\right] = 0. \quad (21.16)$$

Удобнее выразить векторы напряженностей $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$, $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{H}'$ через их компоненты $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_1'$ и $\mathcal{H}_1$, $\mathcal{H}_1'$, параллельные вектору $\mathbf{V}$, и $\mathcal{E}_2$, $\mathcal{E}_2'$ и $\mathcal{H}_2$, $\mathcal{H}_2'$, перпендикулярные $\mathbf{V}$. Из равенства

$$((\mathcal{E}' - \mathcal{E})\mathbf{V}) = 0$$

следует, что

$$\mathcal{E}_1' = \mathcal{E}_1.$$

С другой стороны, поскольку

$$\mathcal{E}_1' - (\mathcal{E}_1'\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 = 0$$

и

$$(\mathcal{E}_2'\mathbf{V}_0) = 0,$$

а также в силу того, что

$$(\mathcal{E}_1'\mathbf{V}_0) = \mathcal{E}'\mathbf{V}_0$$

и

$$\mathcal{E}_1 = (\mathcal{E}_1'\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0,$$

получаем

$$\mathcal{E}_2' = \gamma\left\{\mathcal{E}_2 + \left[\frac{\mathbf{V}}{c}\mathcal{H}_2\right]\right\}. \quad (21.17)$$

Поступая подобным же образом с уравнениями (21.11) и (21.13), читатель может проверить выполнение следующих соотношений:

$$\mathcal{H}_1' = \mathcal{H}_1 \tag{21.18}$$

и

$$\mathcal{H}_2' = \gamma \left\{ \mathcal{H}_2 - \left[\frac{\mathbf{V}}{c} \mathcal{E}_2 \right] \right\}. \tag{21.19}$$

Все эти соотношения можно свести к следующим двум выражениям для $\mathcal{E}'$ и $\mathcal{H}'$:

$$\mathcal{E}' = (\mathcal{E}\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 + \gamma \left\{ \mathcal{E} - (\mathbf{V}_0\mathcal{E})\mathbf{V}_0 + \left[\frac{\mathbf{V}}{c} \mathcal{H} \right] \right\}; \tag{21.20}$$

$$\mathcal{H}' = (\mathcal{H}\mathbf{V}_0)\mathbf{V}_0 + \gamma \left\{ \mathcal{H} - (\mathbf{V}_0\mathcal{H})\mathbf{V}_0 - \left[\frac{\mathbf{V}}{c} \mathcal{E} \right] \right\}. \tag{21.21}$$

Эти законы преобразования для $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ гарантируют сохранение инвариантного вида уравнений движения заряженных частиц (21.7) и (21.10) независимо от скорости системы отсчета.

Нужно отметить, что законы преобразования (21.20) и (21.21) обеспечивают также инвариантную форму для уравнений Максвелла [1]). Итак, мы пришли к выводу, что и законы электродинамики (уравнения Максвелла), и законы движения заряженных частиц в электромагнитном поле можно записать в инвариантной форме (т. е. с помощью систем уравнений, вид которых одинаков во всех системах отсчета, связанных между собой преобразованиями Лоренца).

Нужно сказать, наконец, что законы преобразования для $\mathcal{E}$ и $\mathcal{H}$ приводят к выводам, которых следовало ожидать на основании законов электродинамики. Например, из закона индукции Фарадея следует, что когда контур пересекает магнитное поле $\mathcal{H}$ со скоростью **V**, то в нем индуцируется э. д. с., пропорциональная абсолютным величинам скорости **V** и напряженности

---

[1]) Доказательства этого утверждения выходят за рамки настоящей работы, и мы отсылаем читателя за подробностями к следующим книгам: C. Möller, The Theory of Relativity, Oxford, 1952; W. Panofsky, M. Phillips, Classical Electricity and Magnetism, New York, 1955 (имеется перевод: В. Пановский, М. Филлипс, Классическая электродинамика, М., 1963. — Ред.)

магнитного поля $\mathcal{H}$ и перпендикулярная этим векторам. Из уравнений (21.20) и (21.21) по существу следует тот же результат. Так, если в системе отсчета A имеем $\mathcal{E}=0$ и $\mathcal{H}\neq 0$, то при переходе к системе B (движущейся относительно A со скоростью $\mathbf{V}$), в которой контур покоится, получим

$$\mathcal{E}'=\gamma\left[\frac{\mathbf{V}}{c}\mathcal{H}\right].$$

Тогда э. д. с., обнаруживаемая в той системе, где контур покоится, будет пропорциональна $\mathcal{E}'$.

Аналогично если в системе отсчета A имеем $\mathcal{H}=0$, и $\mathcal{E}\neq 0$, то из уравнений (21.18) и (21.19) следует, что в системе, движущейся относительно A со скоростью $\mathbf{V}$, появится магнитное поле с напряженностью

$$\mathcal{H}'=-\gamma\left[\frac{\mathbf{V}}{c}\mathcal{E}\right].$$

Можно показать, что этот результат эквивалентен появлению максвелловского «тока смещения»

$$\mathbf{j}_d=\frac{c}{4\pi}\frac{\partial\mathcal{E}}{\partial t}.$$

Это значит, что объект, движущийся в статическом электрическом поле, будет испытывать в той системе отсчета, где он покоится, воздействие соответствующего магнитного поля (это можно заметить, если взять, например, магнитный диполь; он будет стремиться ориентироваться по направлению этого «индуцированного» магнитного поля).