26

Диаграммы Минковского и метод коэффициента k

До сих пор обсуждались эйнштейновские релятивистские представления о пространстве и времени с физической и математической точек зрения — математическое рассмотрение основывалось главным образом на преобразованиях Лоренца, выражающихся формулами (14.3) и (14.4). Теперь мы рассмотрим теорию относительности с помощью *геометрического* метода, развитого Минковским и помогающего в другом свете представить сущность этой теории.

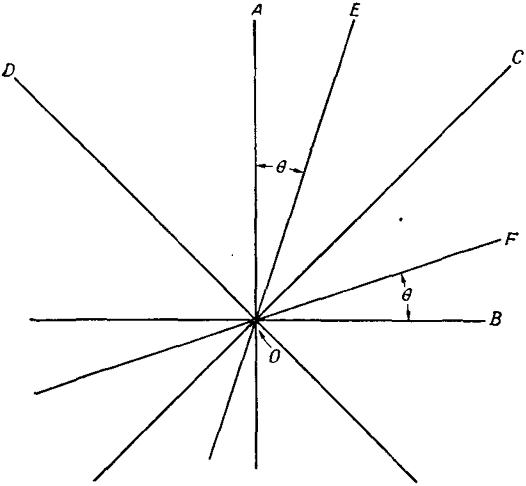
Мы начнем с так называемых «диаграмм Минковского» на пространственно-временно́й плоскости (фиг. 9). При обсуждении таких диаграмм сначала рассмотрим наблюдателя Ω_1, покоящегося относительно лаборатории. Координату времени, измеряемого этим наблюдателем, мы будем откладывать на линии OA, а одну из пространственных координат z — на линии OB. В принципе следовало бы ввести и другие две пространственные координаты x и y так, чтобы наша диаграмма стала четырехмерной. Однако во многих случаях достаточно рассматривать лишь z и t, т. е. двумерную диаграмму.

Каждая точка[1]) этой диаграммы изображает некоторое *событие* (например, вспышку светового сигнала). Каждое реальное событие, конечно, должно происходить в течение какого-то интервала времени и занимать некоторую область пространства. Если, однако,

[1]) Начиная с этой главы, автор под «точкой» понимает *мировую точку* или *событие*, взятое в четырехмерном пространстве, так что это — не только место в пространстве, но и момент времени. — *Прим. перев.*

этот интервал времени очень короткий, а область пространства соответственно мала, то можно заменить реальное *протяженное событие* простейшей абстракцией — *точечным событием.*

Пусть точка O представляет такое событие; оно произошло в момент $t=0$ с наблюдателем, находившимся



Фиг. 9.

в точке $z=0$. Если этот наблюдатель покоился относительно лаборатории, то события, происходящие с ним в течение некоторого времени, расположатся на прямой OA, которая на нашей диаграмме является осью времени t. Такая линия называется *мировой линией.* При этом прямая OB будет представлять все те события, которые одновременны с O, если измерения проводятся этим наблюдателем.

Удобно перейти к таким единицам измерения времени, при которых скорость света c равна единице. Сделать это можно, положив $\tau=ct$. Если теперь считать, что по оси OA время отложено в единицах τ, то распространение лучей света ($z=\pm\tau$) изобразится на диаграмме Минковского двумя линиями, OC и OD, наклоненными к осям z и τ под углом 45°.

Для трех пространственных измерений, конечно, будет много больше возможных направлений распространения световых лучей, и полная совокупность их с началом в точке O будет изображаться конусом. Тогда прямые OC и OD соответствуют пересечению такого «светового конуса» и плоскости $z\tau$.

Введем теперь второго наблюдателя Ω_2, летящего на ракете со скоростью v мимо лаборатории. Его движение описывается формулой

$$z = \frac{v}{c}\tau$$

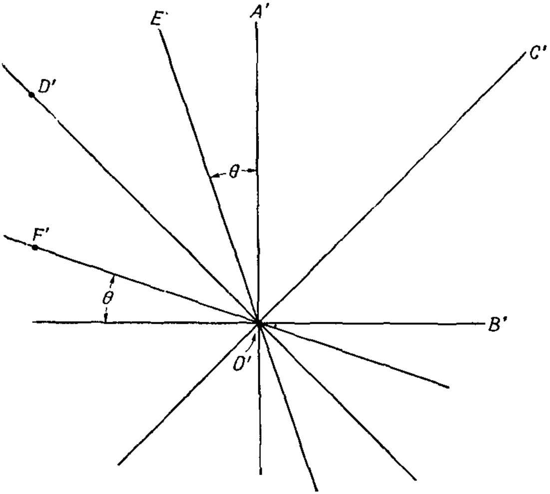
и изображается мировой линией OE, наклон которой относительно оси τ можно найти по формуле

$$\operatorname{tg}\theta = \frac{v}{c}.$$

Согласно выводам, сделанным в гл. 13, такой наблюдатель будет считать одновременными другие события, а не те, что были одновременны с точки зрения наблюдателя Ω_1, связанного с лабораторией. Так, если τ' и z' — координаты, измеряемые наблюдателем Ω_2, то равенство $\tau'=0$ выражает для него одновременность соответствующих событий. Из преобразования (14.3) следует, что если $\tau'=ct'=0$, то $t=(v/c^2)z$, откуда $\tau=(v/c)z$. Все определенные таким образом точки ложатся на прямую OF, имеющую наклон $\theta=\operatorname{arc\,tg}(v/c)$ к оси z.

Согласно принципу относительности (см. гл. 16 и 17), «привилегированных» систем отсчета не существует, так что в каждой системе отсчета *все* основные законы выражаются одинаковыми соотношениями. Поэтому можно с таким же правом использовать диаграмму Минковского, в которой наблюдатель на ракете считается покоящимся, а лаборатория — движущейся относительно ракеты со скоростью $-v$. Такая возможность изображена на фиг. 10, где прямая $O'A'$ является мировой линией ракеты, а $O'B'$ — совокупность событий, одновременных с точки зрения наблюдателя на ракетном корабле. Тогда мировой линией наблюдателя в лаборатории будет прямая $O'E'$; для этого наблюдателя событие O' является одновременным со всеми событиями, лежащими на прямой $O'F'$, в соответствии со скоростью лаборатории относительно ракеты, равной $-v$.

Одним из самых простых и изящных путей дальнейшего анализа смысла принципа относительности с помощью диаграмм Минковского является использование



Фиг. 10.

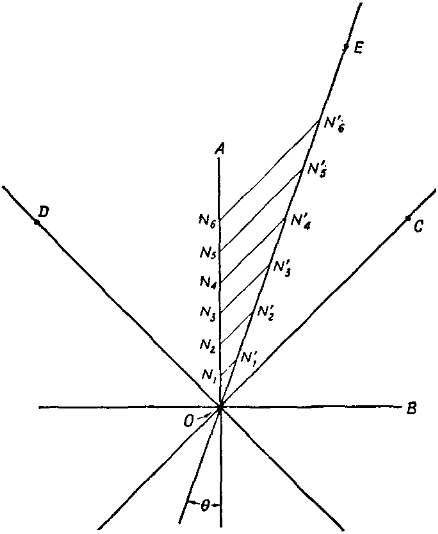
«метода коэффициента k». Этот метод[1]) основан на рассмотрении системы наблюдателей, каждый из которых снабжен часами одной и той же конструкции и радиолокатором, импульсы которого управляются этими часами и, таким образом, следуют друг за другом через одинаковые промежутки времени. Предполагается, что наряду с радиолокационным передатчиком каждый наблюдатель имеет и соответствующий приемник, способ-

---

[1]) Его предложил Г. Бонди в своей популярной лекции. (См. Г. Бонди, Относительность и здравый смысл, изд-во «Мир», 1967. — *Прим. перев.*)

ный отмечать моменты прихода сигналов (по часам этого наблюдателя) — как его собственных, отразившихся от окружающих объектов, так и посланных другими наблюдателями.

Пусть сначала мы покоимся в лаборатории и посылаем сигналы в упорядоченные моменты времени N_1,



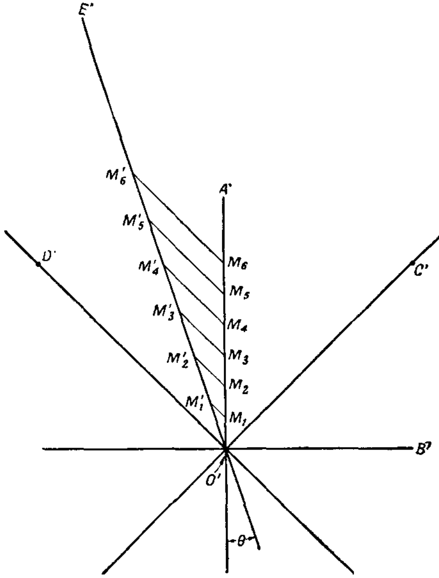
Фиг. 11.

N_2, N_3 и т. д., как это изображено на фиг. 11. Наши сигналы распространяются со скоростью света, и их принимает наблюдатель на ракете (мировая линия OE) в соответствующие моменты времени, которые мы обозначим, как N_1', N_2', N_3' и т. д. Пусть временной интервал между импульсами, *измеренный лабораторными часами*, равен T_0. Тогда наблюдатель в ракете измерит другую величину интервала между моментами *приема* следующих друг за другом импульсов, скажем T. Очевидно, что T и T_0 должны быть, вообще говоря, разными. Действительно, даже в теории Ньютона интервал

T_0 не будет равен T вследствие допплеровского смеще- является другой функцией скорости ракеты, чем это отношение

$$k = \frac{T}{T_0} \qquad (26.1)$$

является другой функцией скорости ракеты, чем это было в теории Ньютона.



Фиг. 12.

Согласно принципу относительности, этот опыт может быть обращен. Тогда наблюдатель на ракете посылает равноотстоящие во времени импульсы в моменты M_1, M_2, M_3 и т. д., как показано на фиг. 12, причем по его часам интервал между соседними импульсами равен T_0. Наблюдатель в лаборатории принимает эти импульсы в моменты времени M_1', M_2', M_3' и т. д., причем интервал между ними равен T'. Определим отношение

$$k' = \frac{T'}{T_0}, \qquad (26.2)$$

величину которого можно найти следующим образом.

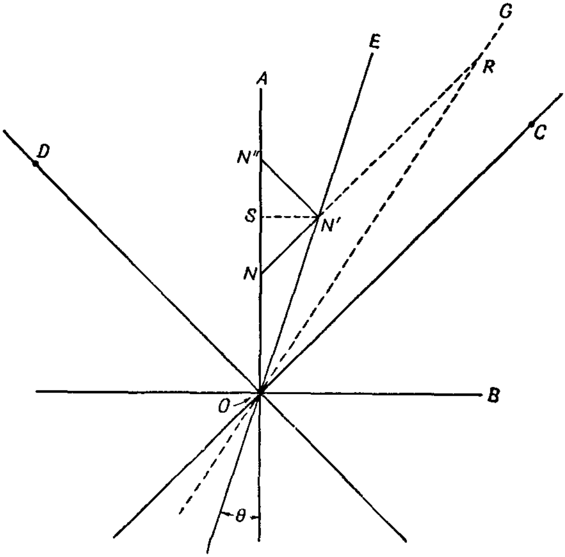
Заметим, что на фиг. 12 прямые M_1M_1', M_2M_2' и т. д. (равно как прямые N_1N_1', N_2N_2' и т. д. на фиг. 11) изображают распространение радиосигналов и имеют наклон 45° соответственно тому, что скорость света одинакова в обеих системах отсчета и равна c. В этом и заключается учет в диаграммах Минковского того опытного факта, что скорость света постоянна и имеет одинаковую величину для всех наблюдателей.

Очевидно, что проведенные в двух системах отсчета опыты равноправны и должны описываться симметричным образом, если каждый из них относить к системе отсчета соответствующего наблюдателя. Но в обоих случаях последовательные импульсы посылались через интервалы времени T_0 по тем часам, которые управляли посылкой этих сигналов. В обоих случаях импульсы распространялись со скоростью c и принимались наблюдателем, удаляющимся от их источника со скоростью v. Согласно принципу относительности, если два разных наблюдателя производят эквивалентные действия, то эти действия будут протекать по одним и тем же законам. Поэтому мы должны заключить, что отношение $k' = T'/T_0$ должно быть равно отношению $k = T/T_0$, т. е.

$$k = k'. \qquad (26.3)$$

Следует, однако, помнить, что этот вывод справедлив лишь в релятивистской теории, согласно которой скорость света одинакова во всех системах отсчета. Например, в теории Ньютона распространение лучей света описывается линиями, наклоненными к осям под углом 45°, лишь в системе, покоящейся относительно эфира, так что наше рассуждение, показывающее, что k и k' равны, там будет неправомерным.

Теперь можно перейти к определению коэффициента k как функции относительной скорости v двух наблюдателей. Для этого мы рассмотрим случай, когда наблюдатель в лаборатории (изображаемый мировой линией OA на фиг. 13) обменивается сигналами с движущимся наблюдателем (мировая линия OE). Предположим, что в начале опыта оба наблюдателя находились



Фиг. 13.

вблизи друг друга, когда их положение в пространстве и момент времени соответствовали началу координат O. Так как в этот момент сигналу требуется пренебрежимо малое время для пути между двумя наблюдателями, они смогут тогда синхронизовать свои часы. Для удобства положим, что оба наблюдателя поставили свои часы так, чтобы событие O соответствовало моментам

$$t = 0, \qquad t' = 0.$$

Затем наблюдатель в лаборатории, находясь в точке, соответствующей событию N, посылает сигнал в момент T_0, измеренный по *его* часам. На ракете этот сигнал будет принят в точке N'. При этом наблюдатель на ракете отметит время

$$T = kT_0. \tag{26.4}$$

Пусть, однако, наблюдатель на ракете, приняв сигнал в точке N', немедленно пошлет собственный сигнал. Последний будет принят в лаборатории в точке N'' в момент T_1. Но полученный на основании принципа относительности вывод позволяет заключить, что

$$T_1 = kT = k^2T_0. \tag{26.5}$$

Обратимся теперь к элементарной геометрии. Так как отрезки NN' и $N'N''$ соответствуют световым лучам, они наклонены к осям под углом 45°, и поэтому

$$(SN') = (NS) = (SN'') = \frac{(NN'')}{2},$$

$$(SN') = (NS) = (OS)\operatorname{tg}\theta = (OS)\frac{v}{c} = \frac{(NN'')}{2},$$

$$(OS) = (ON) + (NS) = (ON) + \frac{(NN'')}{2},$$

$$(ON) = T_0,$$

$$(NN'') = T_1 - T_0 = \frac{k^2-1}{2}T_0,$$

$$(OS)\frac{v}{c} = \frac{k^2+1}{2}\frac{v}{c}T_0 = \frac{k^2-1}{2}T_0, \tag{26.6}$$

$$\frac{v}{c} = \frac{k^2-1}{k^2+1}, \tag{26.7}$$

$$k = \sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}. \tag{26.8}$$

Мы вычислили, таким образом, величину коэффициента k — основную во всем этом методе. Заметим, что при $v=0$ она равна единице, как и следовало ожидать. Когда скорость v положительна, коэффициент k больше единицы, а когда v отрицательна, то k меньше единицы.

Коэффициент k фактически описывает релятивистский эффект Допплера (рассматриваемый под углом 0°), который был нами вычислен ранее более окольным путем [выражение (17.12)] с помощью преобразований Лоренца. Однако на этот раз мы вывели эту формулу непосредственно из принципа относительности, пользуясь фактом инвариантности скорости света при измерении ее наблюдателями, движущимися с разными скоростями.

Оказывается, с помощью метода коэффициента k можно вывести все основные формулы, полученные нами ранее на основании преобразований Лоренца. Чтобы проиллюстрировать эту возможность, выведем сначала формулу для сравнения скоростей хода эквивалентных часов, движущихся с разными скоростями. На основании фиг. 13 мы знаем, что за интервал времени, соответствующий ON', наблюдатель на ракете зафиксирует интервал

$$T = kT_0. \tag{26.9}$$

С другой стороны, из-за того, что отрезок $N'S$ перпендикулярен оси OA, наблюдатель в лаборатории будет считать событие N' одновременным с S. Таким образом, наблюдатель в лаборатории припишет событию N' временну́ю координату

$$t = (OS) = (ON) + (NS) = (ON) + \frac{(NN'')}{2} = \frac{1+k^2}{2} T_0. \tag{26.10}$$

Поэтому отношение времен t/T одного и того же события N', первое из которых измеряется наблюдателем в лаборатории, а второе — наблюдателем в ракете, равно

$$\frac{t}{T} = \frac{k+k^{-1}}{2} = \frac{1+k^2}{2k} = \left[1 + \frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}\right]\frac{1}{2k} =$$
$$= \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)}}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+(v/c)}} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{26.11}$$

Итак, мы непосредственно вывели закон «замедления» хода часов, не обращаясь к преобразованиям Лоренца. Столь же непосредственно можно теперь вывести и релятивистский закон сложения скоростей. Для этого возьмем третьего наблюдателя, изображенного на фиг. 13 мировой линией OG. Пусть его скорость относительно лаборатории равна w. Коэффициент k, соответствующий этому наблюдателю, можно вычислить двумя разными способами. Мы будем сначала исходить из лабораторной системы отсчета и отправим из точки N

сигнал в момент T_0. Наблюдатель OG примет его в точке R в момент времени

$$T_2 = k(w) \cdot T_0, \tag{26.12}$$

где

$$k(w) = \sqrt{\frac{1+(w/c)}{1-(w/c)}}.$$

Однако выражение для T_2 можно получить также в два приема. Для этого рассмотрим прежде приход сигнала из N в N' в момент

$$T_1 = k(v) \cdot T_0 \tag{26.13}$$

(по часам наблюдателя в ракете), причем

$$k(v) = \sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}.$$

Затем наблюдатель в ракете сразу же посылает свой сигнал, мировая линия которого, конечно, совпадает с $N'R$. Если наблюдатель OG обладает скоростью u согласно измерениям, проводимым в системе отсчета ракеты, то на основании принципа относительности мы должны заключить, что

$$T_2 = k(u) \cdot T_1 = \sqrt{\frac{1+(u/c)}{1-(u/c)}}\sqrt{\frac{1+(v/c)}{1-(v/c)}}\,T_0. \tag{26.14}$$

Отсюда следует соотношение

$$\frac{[1+(u/c)]\,[1+(v/c)]}{[1-(u/c)]\,[1-(v/c)]} = \frac{1+(w/c)}{1-(w/c)} \tag{26.15}$$

или

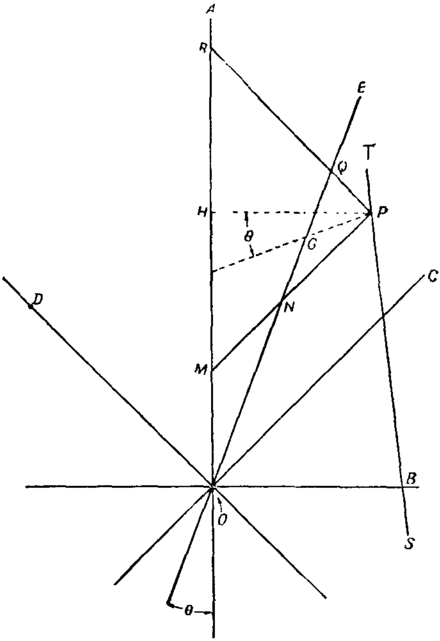
$$k(w) = k(u) \cdot k(v). \tag{26.16}$$

Таким образом, коэффициент k при двух последовательно проводимых преобразованиях равен произведению коэффициентов для каждого отдельного преобразования. С помощью элементарной алгебры получаем

$$w = \frac{u+v}{1+(uv/c^2)}. \tag{26.17}$$

Это и есть релятивистский закон сложения скоростей (15.8).

Наконец, метод коэффициента k можно использовать для вывода самих преобразований Лоренца. Прежде чем дать этот вывод, полезно отметить, что, поскольку скорость света одинакова для всех наблюдателей, нет необходимости пользоваться разными мерами для времени и расстояния. Более того, раз мы располагаем часами, то у нас уже имеется мера длины. Например, если



Фиг. 14.

мы посылаем сигнал радиолокатора к объекту, расположенному на расстоянии d от нас, то зная время δt, требующееся для распространения этого сигнала от нас до объекта и отраженного сигнала обратно к нам, получим расстояние d до этого объекта

$$d = \frac{c\,\delta t}{2} = \frac{\delta \tau}{2}. \tag{26.18}$$

Следовательно, достаточно, чтобы все наблюдатели имели одинаково сконструированные часы. Никаких дополнительных предположений о наличии у них стандартных линеек делать не нужно. Этот факт чрезвычайно упрощает логические обоснования процедуры измерения, так как в качестве стандартных часов можно использовать периоды колебаний атомов или молекул, которые ведут себя совершенно одинаково у всех наблюдателей.

Для вывода преобразований Лоренца обратимся к фиг. 14. Пусть наблюдатель в лаборатории OA и наблюдатель на ракете OE пролетают друг мимо друга в точке O, когда часы обоих показывают 0. В точке M наблюдатель в лаборатории посылает сигнал; в этот момент его часы показывают время T_1. В точке N этот сигнал достигает наблюдателя на ракете, который сразу же отвечает своим сигналом; его часы показывают при этом время T_1'. Оба эти сигнала следуют далее вместе, пока не достигают в точке P предмета, обладающего мировой линией ST. Отраженный импульс на обратном пути приходит в точку Q, где встречает космический корабль в момент T_2' по часам наблюдателя на этом корабле. Распространяясь дальше, этот импульс в точке R будет принят наблюдателем в лаборатории; часы наблюдателя в лаборатории показывают в этот момент время T_2.

Наблюдатель в лаборатории припишет событию P пространственные и временну́ю координаты

$$\tau = ct = cT_1 + c\,\frac{T_2 - T_1}{2} = c\,\frac{T_2 + T_1}{2}, \tag{26.19}$$

$$x = c\,\frac{T_2 - T_1}{2}, \tag{26.20}$$

$$\tau + x = cT_2, \qquad \tau - x = cT_1. \tag{26.21}$$

Согласно принципу относительности, наблюдатель на ракете получит аналогичную систему формул:

$$\begin{aligned} \tau' &= ct' = \frac{c}{2}(T_1' + T_2'), & x' &= \frac{c}{2}(T_2' - T_1'), \\ \tau' + x' &= cT_2', & \tau' - x' &= cT_1'. \end{aligned} \tag{26.22}$$

Вместе с тем метод коэффициента k дает

$$T_1' = kT_1, \qquad T_2 = kT_2',$$
$$T_1'T_2' = T_1T_2. \tag{26.23}$$

Учитывая равенство $\tau = ct$, получаем отсюда

$$\left(t' + \frac{x'}{c}\right)\left(t' - \frac{x'}{c}\right) = (t')^2 - \frac{(x')^2}{c^2} =$$
$$= T_1'T_2' = T_1T_2 = t^2 - \frac{x^2}{c^2}. \tag{26.24}$$

Это соответствует (в одномерном случае) инвариантности квадрата интервала, полученной на основании преобразований Лоренца [см. (9.7) и (9.8)].

Из (26.19) и (26.20) мы найдем теперь

$$t = \frac{kT_2' + (T_1'/k)}{2}, \qquad \frac{x}{c} = \frac{kT_2' - (T_1'/k)}{2}. \tag{26.25}$$

С помощью простых алгебраических преобразований эти выражения легко привести к виду

$$t = \frac{t' - (vx'/c^2)}{\sqrt{1-(v/c)^2}}, \qquad x = \frac{x' - vt'}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{26.26}$$

Это и есть преобразование Лоренца.

Метод коэффициента k позволяет довольно наглядно понять, почему два различных наблюдателя приписывают свойство одновременности разным наборам событий. Действительно, в соотношениях (26.19) — (26.22) просто постулируется, что когда какой-либо наблюдатель посылает радиолокационный импульс, то он *считает,* что событие P происходит одновременно с событием на его мировой линии, которое расположено точно посередине между точками посылки исходного и приема отраженного импульсов. Так, на фиг. 14 наблюдатель в лаборатории полагает, что событие P произошло одновременно с событием H, лежащим посередине между M

и R, а наблюдатель на ракете полагает, что событие P произошло одновременно с событием G, лежащим посередине между N и Q. Мы уже обращали внимание читателя на тот факт, что понятие одновременности в теории относительности условно (см. гл. 12), и качественно обсуждали этот факт на примере наблюдателей в поезде и на железнодорожной насыпи. Теперь мы увидели более точно, как равенство скоростей света для обоих наблюдателей и эквивалентность используемых ими условий, определяющих одновременность, приводят к невозможности для этих наблюдателей прийти к одним и тем же выводам о том, какие события происходят в одно и то же время. Тем самым показаны причины того, почему для разных наблюдателей совокупности одновременно происшедших событий должны быть разными, как это видно на фиг. 9 и 10.

Метод коэффициента k, очевидно, совершенно непосредственно приводит нас ко многим соотношениям, исторически впервые выведенным на основании преобразований Лоренца. Преимущество метода коэффициента k в том, что он делает совершенно очевидной связь между этими соотношениями и основными принципами и фактами, на которых базируется теория. На самом деле, мы исходили здесь из принципа относительности и инвариантности величины скорости света и обнаружили, что сами преобразования Лоренца просто следуют из ряда геометрических и структурных свойств, которыми обладают определенные системы физических событий. Тем не менее, несмотря на свои изящество и эффективность, метод коэффициента k все еще не получил такого развития, чтобы он смог полностью заменить преобразования Лоренца при описании *всех* возможных соотношений, существенных для теории относительности. Положение сейчас таково, что подход, использующий преобразования Лоренца, и метод коэффициента k дополняют друг друга в том смысле, что каждый из них освещает теорию с той стороны, с какой другой метод не может сразу дать результаты. К тому же метод коэффициента k еще сравнительно молод, так что большая часть существующей литературы пользуется языком преобразований Лоренца. Хотя не исключено, что метод коэффициента k может получить в конце концов такое развитие, что заменит преобразования Лоренца как основу математической теории, все же нужно думать, что по крайней мере в течение некоторого времени преобразования Лоренца сохранят за собой роль основы теории, тогда как метод коэффициента k будет служить в качестве дополнительного средства, разъясняющего смысл теории относительности.