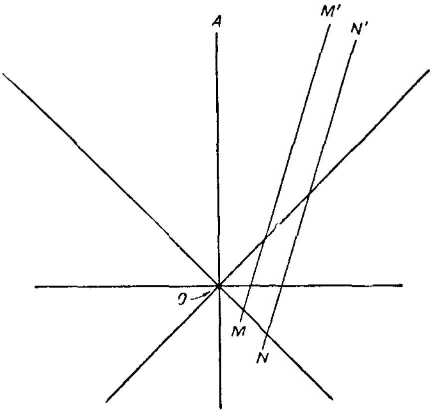
27

Геометрия событий и пространственно-временной континуум

В предыдущей главе мы показали, как с помощью диаграмм Минковского на языке *событий* (например, посылки и приема сигналов) и *процессов* (например, распространения радиолокационного сигнала от передатчика к приемнику) описываются физические явления. Даже непрерывно существующий объект (например, наблюдатель) описывается с помощью соответствующей *мировой линии*, являющейся в действительности геометрическим местом непрерывного ряда событий, представляющих собой последовательные положения и моменты существования этого объекта. На самом деле, конечно, все реальные объекты (включая и наблюдателя) «размазаны» в пространстве. Поэтому они изображаются «мировыми трубками» (одну такую трубку мы изобразили на фиг. 15, начертив ее границы MM' и NN'). Внутри этих трубок, вообще говоря, содержится весьма сложная система событий и процессов (например, происходят движения различных частей рассматриваемого объекта вплоть до его молекул, атомов, электронов, протонов и т. д.).

Диаграммы Минковского олицетворяют коренное изменение наших представлений об общей природе вещей. Чтобы понять, как это происходит, мы прежде всего вспомним, что в механике Ньютона существовало единое понятие одновременности. Там имело поэтому смысл считать, что мир в каждый момент состоит из различных объектов (все равно, на каком уровне описания — макроскопическом, атомном или электронном). В следующий момент все эти объекты будут продолжать существовать, хотя каждый из них как-то изменит свое местоположение. Задача физики заключалась тогда в том, чтобы разложить мир на составляющие его неизменные основные объекты и проследить их движение с течением времени.

В гл. 24 мы отметили, что так как все известные нам объекты (включая так называемые «элементарные частицы») могут возникать, уничтожаться и испытывать



Фиг. 15.

разнообразные превращения, представление о неизменных объектах уже продемонстрировало свою непригодность для описания *опытных фактов*, установленных в отношении физических явлений. Теория относительности, однако, указывает и другие *теоретические аргументы*, говорящие против представлений о том, что мир в каждый момент есть некоторое объединение однозначно определенных объектов. Например, как мы видели, утверждение «в одно и то же время» теперь имеет смысл лишь по отношению к системе отсчета наблюдателя. Разные наблюдатели не будут согласны между собой в вопросе о том, какие события относятся к «одному и тому же времени», а потому эти наблюдатели будут противоречить друг другу в своих утверждениях относительно основных свойств «объектов» — их длин, масс и пр.

Вводя диаграммы Минковского, мы затронули именно эту проблему. Теперь «объект» заменяется некоторой конструкцией из событий и процессов (например, мировой линией или мировой трубкой, изображающей наблюдателей). Обычно рассматриваемый относительно неизменный объект соответствует теперь такой конструкции из событий и процессов, которая стремится оставаться подобной себе в течение неопределенно больших промежутков времени. Объект, не обладающий таким постоянством, соответствует, конечно, изменяющейся и преобразующейся конструкции, имеющей в некоторой области свое начало (там, где объект «рождается»), а в другой области — конец (там, где объект «уничтожается»).

Описанный выше метод соответствует *переходу от разложения мира на составляющие его объекты к разложению его на события и процессы,* на основе которых конструируется, организуется и упорядочивается этот мир в полном соответствии с характеристиками исследуемой материальной системы. Следовательно, взятые вместе *пространство* и *время* образуют основу, на которой должны рассматриваться характеристики физических явлений. В этом смысле пространство и время, вместе взятые, играют роль, подобную той, какую играло одно отдельно взятое пространство в механике Ньютона. Это значит, что природа вещей описывается как некоторая «геометрическая» картина в пространстве и времени, отражаемая диаграммами Минковского.

В геометрии все три пространственных измерения равноценны (т. е. любые два измерения можно поменять местами путем поворота). Алгебраически поворот вокруг оси z на угол α описывается уравнениями преобразования:

$$\begin{aligned} x &= x' \cos\alpha + y' \sin\alpha, \\ y &= y' \cos\alpha - x' \sin\alpha. \end{aligned} \tag{27.1}$$

Если бы такого преобразования не существовало, едва ли можно было бы оправдать объединение трех измерений в единое пространство — «континуум» (например, в произвольном графике, на одной оси которого откладывается такая физическая величина, как температура, а на другой — давление, подобное объединение невозможно). Тогда, естественно, возникает вопрос, не будет ли в «геометрии» взятых вместе пространства и времени подобного же объединения пространственных и временно́го измерений, так чтобы они образовали единый континуум. (Вспомним, что в механике Ньютона пространство и время не зависят друг от друга и, следовательно, подобного объединения произойти не может.)

Чтобы показать, что в теории относительности действительно имеет место *своеобразное* объединение пространства и времени, достаточно взять преобразование Лоренца, при котором координаты z и τ выражаются через z' и τ'. Это преобразование с очевидностью *подобно* повороту. Чтобы отчетливее выразить эту аналогию, введем *гиперболический угол* β, определяемый равенствами

$$\operatorname{sh}\beta = \frac{e^{\beta} - e^{-\beta}}{2} = \frac{v}{c}\frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}} \tag{27.2}$$

и

$$\operatorname{ch}\beta = \frac{e^{\beta} + e^{-\beta}}{2} = \frac{1}{\sqrt{1-(v/c)^2}}. \tag{27.3}$$

Тогда преобразование Лоренца запишется в виде

$$\begin{aligned} \tau &= \tau' \operatorname{ch}\beta - z' \operatorname{sh}\beta, \\ z &= z' \operatorname{ch}\beta - \tau' \operatorname{sh}\beta. \end{aligned} \tag{27.4}$$

Мы видим, что формулы преобразования (27.4) отличаются от формул преобразования поворота (27.1) прежде всего заменой тригонометрических функций $\cos\alpha$ и $\sin\alpha$ на гиперболические функции $\operatorname{ch}\beta$ и $\operatorname{sh}\beta$ и, кроме того, отрицательным знаком при *обоих* $\operatorname{sh}\beta$, тогда как в преобразовании (27.1) при одном из $\sin\alpha$ стоит знак плюс, а при другом — минус. Тем не менее аналогия с преобразованием поворота является очень заметной, поэтому преобразование (27.4) называется *гиперболическим поворотом*.

Основное различие между тригонометрическим и гиперболическим поворотами состоит в том, что инвариантными относительно этих преобразований являются разные функции. Так, при тригонометрическом повороте в плоскости xy инвариантна функция x^2+y^2, описывающая квадрат длины, при гиперболическом повороте в плоскости $z\tau$ инвариантна функция τ^2-z^2, которая отличается от квадрата длины тем, что здесь τ^2 и z^2 входят с *противоположными* знаками, тогда как x^2 и y^2 имели *один и тот же знак*.

Если теперь перейти к рассмотрению трех пространственных измерений и одного временно́го, то из соотношения (9.7) мы увидим, что величина

$$s^2=\tau^2-x^2-y^2-z^2=\tau'^2-x'^2-y'^2-z'^2 \quad (27.5)$$

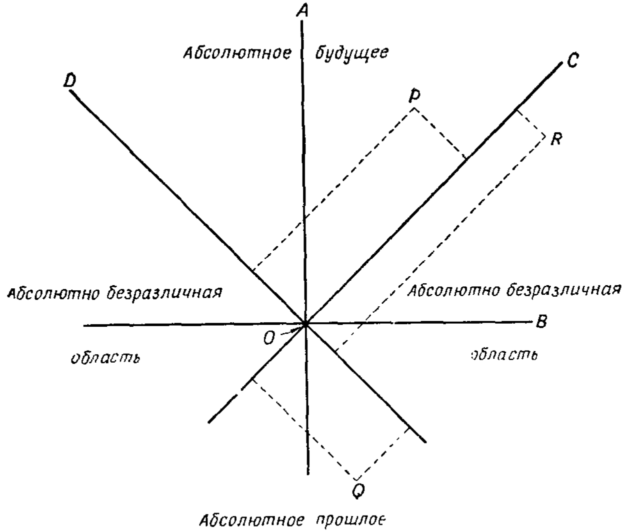
является инвариантной как относительно произвольных преобразований Лоренца в пространстве и времени, так и относительно произвольных пространственных поворотов (равно как и при инверсии осей x, y, z и τ). Сделаем более общее заключение: если взять два события с координатами x_1, y_1, z_1, τ_1 и x_2, y_2, z_2, τ_2, то соответствующий инвариант, определяющий квадрат *интервала* между этими событиями, будет иметь вид

$$s^2=(\tau_1-\tau_2)^2-(x_1-x_2)^2-(y_1-y_2)^2-(z_1-z_2)^2. \quad (27.6)$$

Легко видеть, что функция (27.6) является обобщением функции (11.3), описывающей квадрат длины, которой пользуются в обычном трехмерном пространстве. Выражение (27.6) применимо, однако, и в пространстве и во времени, так как координата τ подвергается преобразованию Лоренца, являющемуся гиперболическим поворотом, а не обычным.

Все это указывает на то, что в релятивистской физике пространство и время объединены в четырехмерный континуум, в котором они способны переходить друг в друга таким образом, чтобы функция s^2, записанная в виде (27.6), оставалась инвариантной. Этот континуум называют *пространством-временем* — уже не «пространством и временем»: дефис подчеркивает, что речь идет о новом роде объединения.

Следует сказать, что, несмотря на внесенное теорией относительности описанное выше объединение пространства и времени, между ними сохраняется довольно важное и специфическое различие, обязанное тому факту, что слагаемые $(\tau_1-\tau_2)^2$ и $(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2+(z_1-z_2)^2$ входят в выражение инвариантного квадрата интервала s^2 с *противоположными* знаками. Ввиду этого величина s^2 может для различных пар событий



Фиг. 16.

принимать положительные, отрицательные и нулевые значения. Например, при $s^2=0$ мы имеем световой конус, и ясно, что такой конус является границей между областями событий с положительными и отрицательными значениями s^2. Если на фиг. 16 одно из событий, а именно O, принять в качестве начала координат (для него $x_2=y_2=z_2=\tau_2=0$), то увидим, что для лежащего *внутри* светового конуса другого события P величина s^2 положительна, тогда как для лежащего снаружи конуса события R она отрицательна. Но так как s^2 — инвариант, то это означает, что *свойство события находиться внутри,* *снаружи или на световом конусе с вершиной в другом событии не зависит от выбора системы отсчета.* Итак, хотя пространство и время до некоторой степени могут превращаться друг в друга при изменениях систем отсчета, такое превращение должно быть подчинено определенным ограничениям в том смысле, что интервал, лежащий внутри светового конуса, не может оказаться лежащим вне этого конуса или на самом конусе.

Простейшим случаем интервала внутри светового конуса будет интервал, для которого $x=y=z=0$. Этот интервал содержит лишь разность времен. При преобразовании Лоренца этот интервал переходит в интервал с новыми координатами x', y', z' и τ', причем новые x', y' и z', вообще говоря, отличны от нуля. Тем не менее квадрат интервала остается положительным, поскольку он является инвариантом. Поэтому интервалы, для которых s^2 — положительная величина, называются «временно-подобными», так как в некоторых системах отсчета они будут содержать лишь разности времен для событий, происшедших в одном и том же месте пространства.

С другой стороны, простейшим случаем интервала вне светового конуса будет интервал, для которого $\tau=0$. Такой интервал, соответствующий событиям, разделенным лишь в пространстве, обладает отрицательным значением s^2. Если перейти к новой системе отсчета, то, вообще говоря, τ' уже не будет равно нулю, однако s^2 не изменится и останется поэтому отрицательным. Такие интервалы называются «пространственно-подобными», так как в некоторых системах отсчета они соответствуют одновременным событиям, разделенным пространственно.

Итак ясно, что, хотя пространственные и временна́я координаты могут комбинироваться друг с другом при изменении скорости системы отсчета, различие между пространственно-подобными и временно-подобными парами событий инвариантно и одинаково для всех наблюдателей. Точно так же инвариантны расположения событий на световом конусе, когда интервал между ними не пространственно-подобный и не временно-подобный. Таким образом, сохраняется некоторое тонкое различие между пространством и временем (в смысле невозможности их *полной* перестановки местами при преобразованиях), несмотря на факт объединения пространства-времени в четырехмерный континуум. (Если бы координаты z и τ было можно подвергнуть обычному тригонометрическому повороту, имела бы место *полная* эквивалентность пространства и времени, так как было бы можно просто поменять местами z и τ подобно перемене местами x и y при повороте на 90°.)

Можно еще глубже продвинуться в понимании инвариантного различия между пространственно-подобными, временно-подобными и «нулевыми» (изотропными) интервалами (последние лежат на световом конусе, и для них $s^2=0$). С этой целью мы будем измерять координаты u и v события P на диаграмме Минковского вдоль мировой линии светового луча. Это соответствует повороту на 45° в плоскости $z\tau$.

Мы получим тогда

$$u=\frac{\tau-z}{\sqrt{2}}, \qquad v=\frac{\tau+z}{\sqrt{2}},$$
$$uv=\frac{\tau^2-z^2}{2}=\frac{s^2}{2}. \tag{27.7}$$

Поэтому при новом выборе осей инвариант s^2 представляет собой *произведение* u и v. Так как для светового луча $s^2=0$, то для него будет выполняться либо равенство $u=0$, либо $v=0$. Уравнение $u=0$ определяет линию OC, а уравнение $v=0$ — линию OD.

Точка типа P (см. фиг. 16), лежащая внутри светового конуса и описывающая событие более позднее, чем O, обладает *положительными* координатами u и v. Напротив, точка Q, находящаяся внутри светового конуса и описывающая более раннее событие, чем O, обладает *отрицательными* координатами u и v. Точки вне светового конуса (например, R) должны обладать *либо* положительным u и отрицательным v, *либо* отрицательным u и положительным v.

Как меняются координаты u и v при преобразовании Лоренца (27.4)? Произведем соответствующие подстановки:

$$u = \frac{\tau - z}{\sqrt{2}} = \frac{(\operatorname{ch}\beta)\,\tau' - (\operatorname{sh}\beta)\,z' - (\operatorname{ch}\beta)\,z' + (\operatorname{sh}\beta)\,\tau'}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{e^{\beta}}{\sqrt{2}}(\tau' - z') = e^{\beta}u', \qquad (27.8)$$

$$v = \frac{\tau + z}{\sqrt{2}} = \frac{(\operatorname{ch}\beta)\,\tau' - (\operatorname{sh}\beta)\,z' + (\operatorname{ch}\beta)\,z' - (\operatorname{sh}\beta)\,\tau'}{\sqrt{2}} =$$

$$= \frac{e^{-\beta}}{\sqrt{2}}(\tau' + z') = e^{-\beta}v'. \qquad (27.9)$$

Итак, при преобразовании Лоренца координаты u и v преобразуются особенно просто, причем каждая из них умножается на экспоненту e^{β} или $e^{-\beta}$. Эти множители обратны друг другу, так что произведение uv остается инвариантным. Особым случаем будет мировая линия светового луча, для которой в старых координатах $u=0$ или $v=0$, а в новых координатах снова $u'=0$ или $v'=0$, что непосредственно демонстрирует инвариантность величины скорости света.

Преобразование Лоренца, очевидно, оказывается теперь растяжением вдоль мировой линии одного светового луча в e^{β} раз, а вдоль мировой линии другого луча — сжатием во столько же раз (растяжением в $e^{-\beta}$) раз. Если взять какой-нибудь элемент «площади» для пространства-времени, то ясно, что при таком преобразовании этот элемент подвергнется некоему «сплющиванию» с «осями» сплющивания, соответствующими мировым линиям двух световых лучей. Так, вместо истинного (или тригонометрического) поворота пространственно-временно́е преобразование приводит к гиперболическому повороту, в действительности представляющему собой, как мы видели, «сплющивание» картины событий.

В описанном выше преобразовании «сплющивания» координаты u и v умножаются на экспоненты e^{β} и $e^{-\beta}$, которые всегда *положительны*. Отсюда следует, что разделение событий, лежащих внутри светового конуса, на более поздние и более ранние, чем O, инвариантно. Итак, мы охарактеризовали инвариантным образом не только расположение событий внутри, вне или на световом конусе с вершиной O, но и то их инвариантное свойство, что они лежат в световом конусе будущего относительно O (совершаются позднее, чем событие O) или в световом конусе прошлого относительно O (совершились ранее O).

Подобным же образом легко видеть, что для событий, лежащих *на световом конусе*, также существует инвариантное различие между более ранними и более поздними событиями. Это связано с тем, что выполняется либо равенство $u=0$, либо равенство $v=0$, но вторая координата, отличная от нуля, должна быть положительной, если событие произошло позднее, чем O, и отрицательной, если оно произошло раньше O.

Напротив, для событий, лежащих *вне светового конуса* с вершиной в O, свойство быть позднее или раньше события O неинвариантно. Возвращаясь к фиг. 9, рассмотрим, например, событие B, одновременное с O в лабораторной системе отсчета. В системе отсчета наблюдателя Ω_2, движущегося со скоростью v мимо лаборатории (мировая линия OE), событием, одновременным с O, будет, например, B', лежащее на отрезке OF и поэтому *не одновременное* с O в лабораторной системе отсчета. Если мы рассмотрим *все возможные* значения скорости v, то обнаружим, что *любую* точку вне светового конуса с вершиной в O можно рассматривать как одновременную событию O с позиций *некоторого* наблюдателя, причем для других наблюдателей, обладающих соответственно подобранными скоростями, эта же точка будет лежать либо в прошлом, либо в будущем относительно O. Итак, для событий, лежащих внутри светового конуса данного события, существует однозначный порядок следования во времени (в том смысле, что все наблюдатели будут согласны друг с другом в определении того, какое событие произошло раньше, а какое — позже, чем данное). Напротив, события, лежащие вне светового конуса с вершиной в данном событии, не упорядочены относительно этого события в своем следовании.