

4. ПРАВИЛА СЛОЖЕНИЯ МОМЕНТОВ

Состояние со спином $\frac{1}{2}$ описывается двумя амплитудами. В общем случае

$$a = a_+ [\frac{1}{2}] + a_- [-\frac{1}{2}],$$

где $[\frac{1}{2}]$ обозначает столбец $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $[-\frac{1}{2}]$ — столбец $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$,

а a равно $\begin{pmatrix} a_+ \\ a_- \end{pmatrix}$.

Например, решение уравнения

$$M_x a = \frac{1}{2} a,$$

соответствующее спину, направленному вверх по оси x , будет

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}} [\frac{1}{2}] + \frac{1}{\sqrt{2}} [-\frac{1}{2}].$$

Соответственно, для спина, направленного:

$$\text{вниз по оси } x: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} [\frac{1}{2}] - \frac{1}{\sqrt{2}} [-\frac{1}{2}],$$

$$\text{вверх по } y: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} [\frac{1}{2}] + \frac{i}{\sqrt{2}} [-\frac{1}{2}],$$

$$\text{вниз по } y: \quad \frac{1}{\sqrt{2}} [\frac{1}{2}] - \frac{i}{\sqrt{2}} [-\frac{1}{2}].$$

Более того, можно показать, что любое состояние (любая суперпозиция $[\frac{1}{2}]$ и $[-\frac{1}{2}]$) представляет спин, ориентированный в каком-либо направлении.

Любая система, описываемая двумя комплексными числами, аналогична системе со спином $\frac{1}{2}$. Рассмотрим, например, поляризацию света. Пусть x -поляризация направлена по, а y -поляризация против оси ζ в искусственном трехмерном пространстве. Две другие оси этого пространства мы обозначим ξ и η . При этом спин по оси ξ соответствует поляризации $+45^\circ$, а спин против оси ξ — поляризации -45° . Спин, направленный по оси η , есть правая круговая поляризация (ПКП), а направление против оси η соответствует левой круговой поляризации (ЛКП). Если мы нарисуем единичную сферу в этом

новом пространстве (рис. 4-1), то каждое состояние поляризации будет представляться точкой на этой сфере.

Произвольное направление соответствует эллиптической поляризации. Прохождение света через четвертьволновую пластину представляет собой некоторое вращение. Приведенная связь между поляризацией света и направлением в трехмерном пространстве была когда-то использована Стоксом. Она оказывается полезной для

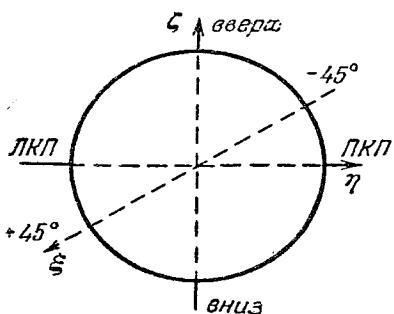


Рис. 4-1.

понимания некоторых процессов, например, протекающих в мазерах. (Мазер представляет собой устройство, использующее систему — молекулу аммиака, — которая может переходить из одного состояния в другое под воздействием электрического поля. Принцип действия может быть легко понят, если представить состояние молекулы аммиака в любой мо-

мент времени через направление в некотором фиктивном трехмерном пространстве, аналогичном обычному пространству для электрона со спином $1/2$.)

Правила сложения моментов. Пусть некоторый прибор рождает две частицы A и B . Допустим, что частица A имеет спин 1 и может существовать в трех состояниях: $m=+1, 0, -1$ и что частица B со спином $1/2$ существует в двух состояниях с $m=+1/2, -1/2$. Для каждого из трех состояний A имеются два состояния B , поэтому система двух частиц может находиться в шести состояниях.

Такую систему можно представить, например, как электрон, вращающийся вокруг ядра. Каким способом следует описывать такую составную систему? Пусть матрицы момента импульса M_A и M_B действуют на состояния ψ_A и ψ_B . Тогда

$$(1 + i\varepsilon M_z) \psi_A \psi_B = (1 + i\varepsilon M_{zA}) \psi_A (1 + i\varepsilon M_{zB}) \psi_B = \\ = [1 + i\varepsilon (M_A + M_B)_z] \psi_A \psi_B,$$

или *)

$$M_z = M_{zA} + M_{zB}.$$

Состояния составной системы приведены в таблице 4-1. Поскольку их всего шесть, то может создаться впечатление, что $j = \frac{5}{2}$. Там, однако, нет значений $m = \pm \frac{5}{2}$, а состояния с $m = \pm \frac{1}{2}$ входят дважды.

Таблица 4-1

m_A	m_B	m	m_A	m_B	m
1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$
1	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	-1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$

В действительности величина $M^2 = (M_A + M_B)^2$ приводит к двум значениям для j :

$$j = \frac{3}{2}, \quad m = \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}$$

и

$$j = \frac{1}{2}, \quad m = \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}.$$

Ясно, что состояние $j = \frac{3}{2}, m = \frac{3}{2}$ есть не что иное, как состояние $(1) (\frac{1}{2})$ с параллельными спинами. Но какое же состояние соответствует $j = \frac{3}{2}, m = \frac{1}{2}$? Напомним, что

$$M_-(m) = [j(j+1) - m(m-1)]^{1/2}(m-1).$$

Поэтому действие суммарного оператора

$$M_- = M_A^4 + M_B^4$$

будет

$$M_-(\frac{1}{2}) = (-\frac{1}{2}), \quad M_-(\frac{-1}{2}) = 0,$$

$$M_-(1) = \sqrt{2}(0), \quad M_-(0) = \sqrt{2}(-1), \quad M_-(\frac{-1}{2}) = 0$$

и, следовательно,

$$M_-(1)(\frac{1}{2}) = \sqrt{2}(0)(\frac{1}{2}) + (1)(-\frac{1}{2}).$$

*) Более точно, $M_z = M_{zA}I_B + M_{zB}I_A$, где I_A и I_B — единичные матрицы для состояний A и B .

Таблица 4-2

m	$j = \frac{3}{2}$	$j = \frac{1}{2}$
$\frac{3}{2}$	$(1) (\frac{1}{2})$	
$\frac{1}{2}$	$(2/\sqrt{3}) (0) (\frac{1}{2}) +$ $+ (1/\sqrt{3}) (1) (-\frac{1}{2})$	$(1/\sqrt{3}) (0) (\frac{1}{2}) -$ $- (2/\sqrt{3}) (1) (-\frac{1}{2})$
$-\frac{1}{2}$	$(2/\sqrt{3}) (0) (-\frac{1}{2}) +$ $+ (-1) (\frac{1}{2})$	$- (1/\sqrt{3}) (0) (-\frac{1}{2}) +$ $+ (2/\sqrt{3}) (-1) (\frac{1}{2})$
$-\frac{3}{2}$	$(-1) (-\frac{1}{2})$	

Таблица 4-3

m	$j = 1$ (симметрично)	$j = 0$ (антисимметрично)
1	$(\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})$	
0	$(1/\sqrt{2}) (\frac{1}{2}) (-\frac{1}{2}) +$ $+ (1/\sqrt{2}) (-\frac{1}{2}) (\frac{1}{2})$	$\left\{ \begin{array}{l} (1/\sqrt{2}) (\frac{1}{2}) (-\frac{1}{2}) \\ - (1/\sqrt{2}) (-\frac{1}{2}) (\frac{1}{2}) \end{array} \right.$
-1	$(-\frac{1}{2}) (-\frac{1}{2})$	

Таблица 4-4

m	$j = 2$ (симметрично)
2	$(+1) (+1)$
1	$(1/\sqrt{2}) [(+1) (0) + (0) (+1)]$
0	$(1/\sqrt{6}) [(+1) (-1) + (-1) (+1) + 2 (0) (0)]$
-1	$(1/\sqrt{2}) [(-1) (0) + (0) (-1)]$
-2	$(-1) (-1)$
m	$j = 1$ (антисимметрично)
2	
1	$(1/\sqrt{2}) [(+1) (0) - (0) (+1)]$
0	$(1/\sqrt{2}) [(+1) (-1) - (-1) (+1)]$
-1	$(1/\sqrt{2}) [(0) (-1) - (-1) (0)]$
-2	

Таблица 4-4 (продолжение)

m	$\delta = 0$ (симметрично)
2	
1	
0	$(1/\sqrt{3}) [(1)(-1) + (-1)(+1) - (0)(0)]$
-1	
-2	

С другой стороны,

$$M_- \left(\begin{smallmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right) = \sqrt{3} \left(\begin{smallmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right).$$

Таким образом,

$$\left(\begin{smallmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right) = \sqrt{\frac{2}{3}} (0) \left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right) + \frac{1}{\sqrt{3}} (1) \left(\begin{smallmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right).$$

Состояние $\left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right)$ образуется линейной комбинацией состояний $(0)\left(\begin{smallmatrix} 1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right)$ и $(1)\left(\begin{smallmatrix} -1/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right)$, ортогональной к $\left(\begin{smallmatrix} 3/2 \\ 1/2 \end{smallmatrix} \right)$. Результаты приведены в таблице 4-2.

Еще примеры: Сложим два состояния со спином $= \frac{1}{2}$ (табл. 4-3) при различных проекциях спина. Затем сложим два состояния со спинами $= 1$ (табл. 4-4). При сложении двух одинаковых моментов состояние с максимальным спином симметрично, следующее антисимметрично и т. д.

Задача 4-1. Рассмотрите сложение трех состояний со спинами $= 1$. Найдите полностью симметричные состояния. Определите их момент.

5. РЕЛЯТИВИЗМ

Вы все знакомы с преобразованиями Лоренца. Для движения вдоль оси z формулы, связывающие две лоренцевы системы отсчета, имеют вид

$$z' = \frac{z - vt}{(1 - v^2)^{1/2}} = z \operatorname{ch} u - t \operatorname{sh} u,$$

$$t' = \frac{t - vz}{(1 - v^2)^{1/2}} = t \operatorname{ch} u - z \operatorname{sh} u,$$

$$x' = x, \quad y' = y,$$