

Сохранение полной энергии и импульса требует, чтобы

$$E_1 = E_2 + \omega, \quad p_1 = p_2 + K - Q$$

(см. рис. 20-3). Суммируя по поляризациям испущенных фотонов, находим

$$d\sigma = \frac{4e^6}{(2\pi)^2} \frac{P_2}{P_1} \frac{1}{Q^4} \frac{d\omega}{\omega} d\Omega_1 d\Omega_2 \left\{ E_1^2 \left[\frac{v_2 \sin \theta_2}{1 - v_2 \cos \theta_2} \right]^2 + \right. \\ \left. + E_2^2 \left[\frac{v_1 \sin \theta_1}{1 - v_1 \cos \theta_1} \right]^2 - \frac{2E_1 E_2 v_1 v_2 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi}{(1 - v_1 \cos \theta_1)(1 - v_2 \cos \theta_2)} \right\}.$$

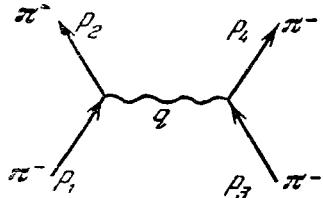
Это выражение является эквивалентом для частиц со спином 0 знаменитой формулы Бете—Гайтлера для частиц спина 1/2.

21. ЗАДАЧИ

Задача 21-1: $\pi^- - \pi^-$ -рассеяние в с. ц. м. Есть две диаграммы:

$$\text{Амп.} = [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 + p_2)(p_3 + p_4)}{q^2},$$

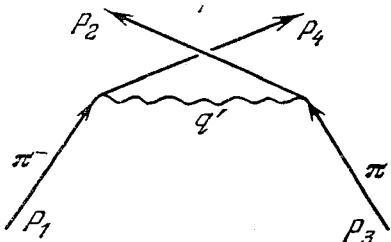
$$p_1 + p_2 = p_3 + p_4, \quad q = p_1 - p_2$$



и «обменная» диаграмма $p_2 \leftrightarrow p_4$:

$$\text{Амп.} = [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 + p_4)(p_2 + p_3)}{(q')^2},$$

$$q' = p_1 - p_4.$$



В системе центра масс $p_1 = -p_3 = P$, $p_2 = -p_4 = Q$, $P^2 = Q^2$, $E_i = E = (P^2 + M^2)^{1/2}$. Поэтому

$$\frac{(p_1 + p_2) \cdot (p_3 + p_4)}{(p_1 - p_2)^2} = \frac{4E^2 + (P + Q)^2}{(P - Q)^2} = \frac{E^2}{P^2} \frac{1 + v^2 \cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)},$$

где θ есть угол между \mathbf{P} и \mathbf{Q} , как показано на рис. 21-1, и $\mathbf{v} = \mathbf{P}/E$.

Подобным образом

$$\frac{(p_1 + p_4) \cdot (p_2 + p_3)}{(p_1 - p_4)^2} = \frac{4E^2 + (\mathbf{P} - \mathbf{Q})^2}{(\mathbf{P} + \mathbf{Q})^2} = \frac{E^2}{\mathbf{P}^2} \frac{1 + v^2 \sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)}.$$

Складывая, получаем

$$\mathfrak{M} = 4\pi e^2 \frac{E^2}{\mathbf{P}^2} \left\{ \frac{1 + v^2 \cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{1 + v^2 \sin^2(\theta/2)}{\cos^2(\theta/2)} \right\}.$$

Задача 21-2: $\pi^+ - \pi^-$ -рассеяние (очень интересный случай). Процесс описывается диаграммой рис. 21-2. Как упоминалось в лекции 5, π^+ -мезон (античастица по

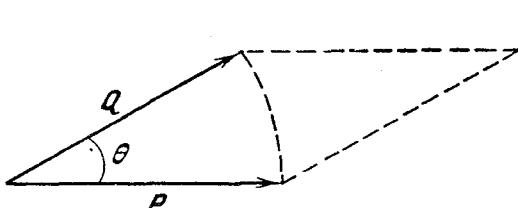


Рис. 21-1.

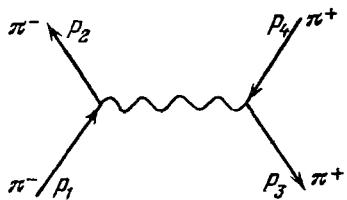
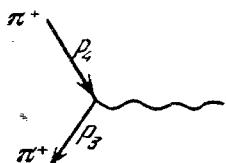


Рис. 21-2.

отношению к π^-) с энергией-импульсом P представляется π^- -мезоном с 4-импульсом $p = -P$, движущимся вспять во времени. Амплитуда элементарного процесса

$$(4\pi)^{1/2} e (p_3 + p_4) \cdot \epsilon = - (4\pi)^{1/2} e (P_3 + P_4) \cdot \epsilon$$



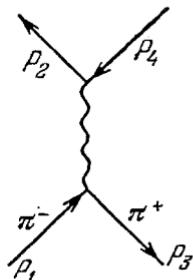
учитывает, что π^+ имеет электрический заряд, противоположный заряду π^- . Подобное соответствие всегда верно для заряженных частиц и их античастиц. Амплитуда процесса рассеяния равна поэтому

$$\text{Амп.} = - [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 + p_2) \cdot (P_3 + P_4)}{(p_1 - p_2)^2}.$$

Поскольку π^+ и π^- различны, то обменной диаграммы нет. Однако имеется аналог такой диаграммы. Посмотрите на диаграмму, которую мы получаем, «меняя соединения»

между внешними пионными линиями так, чтобы p_1 соединялось с p_3 , а не с p_2 , а p_4 соединялось с p_2 вместо p_3 :

$$\text{Амп.} = [(4\pi)^{1/2} e]^2 \frac{(p_1 - P_3) \cdot (p_2 - P_4)}{(p_1 + P_3)^2},$$



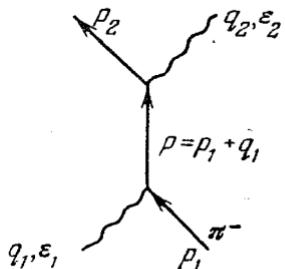
и в которой начальные π^+ и π^- аннигилируют, а виртуальный фотон воссоздает пионную пару в конечном состоянии.

Матричный элемент в с. ц. м. будет

$$\mathcal{M} = 4\pi e^2 \left\{ -\frac{E^2}{p^2} \frac{1 + v^2 \cos^2(\theta/2)}{\sin^2(\theta/2)} + \frac{p^2}{E^2} \cos \theta \right\}.$$

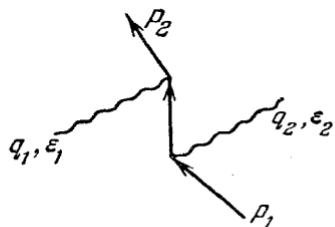
Задача 21-3: комптон-эффект на π^- -мезоне. Рассмотрим процесс $\gamma + \pi^- \rightarrow \pi^- + \gamma$. Он может идти тремя способами:

$$a = [(4\pi)^{1/2} e]^2 \times \\ \times \frac{[(2p_2 + q_2) \cdot \varepsilon_2] [(2p_1 + q_1) \cdot \varepsilon_1]}{(p_1 + q_1)^2 - m^2} = \\ = 4\pi e^2 \frac{(2p_2 \cdot \varepsilon_2)(2p_1 \cdot \varepsilon_1)}{2p_1 \cdot q_1},$$

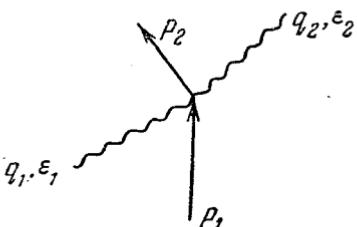


так как $q \cdot \varepsilon = 0$ и $(p + q)^2 - m^2 = 2pq$;

$$b = [(4\pi)^{1/2} e]^2 [(2p_2 - q_1) \cdot \varepsilon_1] \times \\ \times \frac{1}{(p_1 - q_2)^2 - m^2} [(2p_1 - q_1) \cdot \varepsilon_2] = \\ = \frac{4\pi e^2 (2p_2 \cdot \varepsilon_1)(2p_1 \cdot \varepsilon_2)}{2p_1 \cdot q_2};$$



$$c = -4\pi e^2 2 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2).$$



Рассмотрим систему отсчета, в которой начальный пион покоится: $\mathbf{P}_1 = 0$. Положим $\varepsilon_4 = 0$. Тогда

$$\mathbf{p}_1 \cdot \varepsilon_1 = m(\varepsilon_1)_4 = 0, \quad \mathbf{p}_1 \cdot \varepsilon_2 = 0$$

и единственный вклад в матричный элемент идет из c . Этот результат следует из нашего частного выбора калибровки $\varepsilon_4 = 0$. Заметьте, что амплитуда для каждой из диаграмм не градиентно инвариантна. В литературе часто встречаются бессмысленные утверждения об относительной величине вкладов различных диаграмм. Только сумма диаграмм градиентно инвариантна. Покажите это, продемонстрировав, что подстановка $\varepsilon_\mu' = \varepsilon_\mu + \alpha q_\mu$ не дает вклада в поперечное сечение, т. е. что подстановки $\varepsilon_1 = \alpha_1 q_1$ или $\varepsilon_2 = \alpha_2 q_2$ дают нуль.

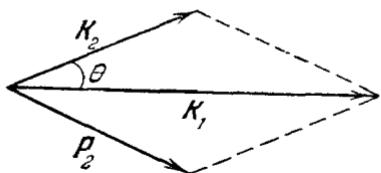


Рис. 21-3.

Рассмотрим систему, в которой начальный пион покоится: $\mathbf{P}_1 = 0$ (см. рис. 21-3). Если регистрируется фотон, а не пион p_2 , мы можем получить удобную формулу, исключая p_2 подстановкой $p_2 = p_1 + k_1 - k_2$. Возведя в квадрат, получаем

$$m^2 = m^2 + 2p_1 k_1 - 2p_2 k_2 - 2k_1 k_2,$$

или, в нашей системе,

$$m(\omega_1 - \omega_2) - \omega_1 \omega_2 (1 - \cos \theta) = 0,$$

что эквивалентно знаменитой формуле Комптона

$$\frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_1} + \frac{1 - \cos \theta}{m}$$

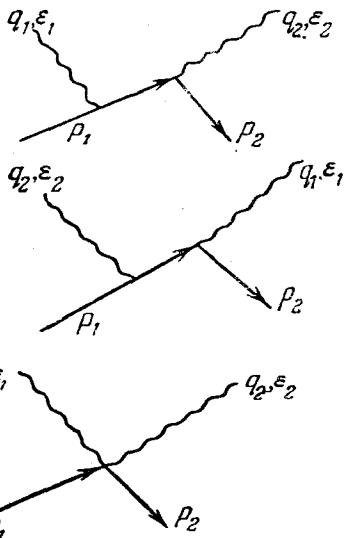
для изменения частоты света, рассеянного на покоящейся частице.

Задача 21-4: аннигиляция $\pi^+ - \pi^-$ -пары в полете. Этот процесс полностью аналогичен эффекту Комптона, за исключением того, что один из пионаев теперь движется вспять во времени.

$$a = 8\pi e^2 \frac{(p_2 \cdot \varepsilon_2) (p_1 \cdot \varepsilon_1)}{p_1 \cdot q_1},$$

$$b = 8\pi e^2 \frac{(p_2 \cdot \varepsilon_1) (p_1 \cdot \varepsilon_2)}{p_1 \cdot q_2},$$

$$c = -8\pi e^2 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2).$$



Как и ранее, рассмотрим систему отсчета, где $P_1=0$

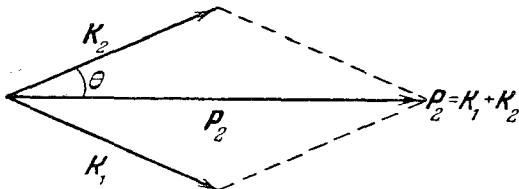


Рис. 21-4.

(см. рис. 21-4). Покажите, квадрируя уравнение $k_1 = p_1 - p_2 - k_2$, что

$$m + E_2 = \omega_2 (m + E_2 - P_2 \cos \theta).$$

Тогда

$$\mathfrak{M} = -8\pi e^2 (\varepsilon_1 \cdot \varepsilon_2)$$

и

$$v d\sigma = \frac{e^4 \omega_2^2}{E_2(m + E_2)} |\epsilon_1 \cdot \epsilon_2|^2 d\Omega.$$

Мы видим, что полное поперечное сечение пропорционально $1/v$ и неограниченно растет при $v \rightarrow 0$. Что это означает? Пусть имеется газ, содержащий n пионов на единицу объема. Вероятность на единицу времени того, что π^+ , движущийся сквозь этот газ со скоростью v , аннигилирует, равна

$$\frac{1}{\tau} = n \sigma v,$$

т. е. является конечной величиной.

Для связанный $\pi^+ - \pi^-$ -системы (аналогичной позитронию) n должно быть равно квадрату волновой функции в начале координат, а τ есть время жизни системы.

22. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ $\frac{1}{2}$

Вернемся к двухкомпонентному спинору, поведение которого при пространственном вращении на угол θ вокруг единичного вектора \mathbf{n} , как было установлено, описывается оператором $\exp(i\theta \mathbf{n} \cdot \mathbf{M})$, где $\mathbf{M} = \sigma/2$. Обратимся теперь к изучению вопроса о поведении такого спинора при лоренцевых преобразованиях. Как и в случае пространственных вращений, достаточно рассмотреть бесконечно малое преобразование. Запишем соответствующий оператор в виде

$$1 + i \frac{\mathbf{v}}{c} \mathbf{N},$$

где \mathbf{v} — бесконечно малая скорость (и положим $c=1$). Действуя как и ранее, получим для конечной скорости v в направлении z оператор $\exp(iwN_z)$, где $\tanh w = v/c$.

Поэтому нам нужны шесть операторов, для того чтобы представить произвольное преобразование Лоренца,

$$\begin{matrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_z & N_z \end{matrix},$$