и

$$v\,d\sigma = \frac{e^4\omega_2^2}{E_2(m+E_2)}\,|\varepsilon_1\cdot\varepsilon_2|^2\,d\Omega.$$

Мы видим, что полное поперечное сечение пропорционально $1/v$ и неограниченно растет при $v \to 0$. Что это означает? Пусть имеется газ, содержащий n пионов на единицу объема. Вероятность на единицу времени того, что π^+, движущийся сквозь этот газ со скоростью v, аннигилирует, равна

$$\frac{1}{\tau} = n\sigma v,$$

т. е. является конечной величиной.

Для связанной π^+—π^--системы (аналогичной позитронию) n должно быть равно квадрату волновой функции в начале координат, а τ есть время жизни системы.

22. ЧАСТИЦЫ СО СПИНОМ 1/2

Вернемся к двухкомпонентному спинору, поведение которого при пространственном вращении на угол θ вокруг единичного вектора $\mathbf{n}$, как было установлено, описывается оператором $\exp(i\theta\mathbf{n}\cdot\mathbf{M})$, где $\mathbf{M}=\sigma/2$. Обратимся теперь к изучению вопроса о поведении такого спинора при лоренцевых преобразованиях. Как и в случае пространственных вращений, достаточно рассмотреть бесконечно малое преобразование. Запишем соответствующий оператор в виде

$$1 + i\frac{\mathbf{v}}{c}\mathbf{N},$$

где $\mathbf{v}$ — бесконечно малая скорость (и положим $c=1$). Действуя как и ранее, получим для конечной скорости v в направлении z оператор $\exp(iwN_z)$, где $\operatorname{th} w = v/c$.

Поэтому нам нужны шесть операторов, для того чтобы представить произвольное преобразование Лоренца,

$$\begin{matrix} M_x & M_y & M_z \\ N_x & N_z & N_z \end{matrix},$$

соответствующие шести вращениям в четырехмерном пространстве. Эти величины образуют антисимметричный тензор с компонентами

$$M_{\mu\nu} = -M_{\nu\mu} = \begin{pmatrix} M_{yz} & M_{zx} & M_{xy} \\ M_{xt} & M_{yt} & M_{zt} \end{pmatrix},$$

причем $M_x = M_{yz}$, $N_x = M_{xt}$ и т. д.

Либо с помощью алгебраических выкладок (рассматривая последовательные преобразования Лоренца), либо с помощью рисунков находим коммутационные соотношения

$$M_x M_z - M_y M_x = iM_z,$$
$$N_x M_y - M_y N_x = iN_z,$$
$$N_x N_y - N_y N_x = -M_z$$

и циклические перестановки.

Все остальные пары коммутируют, т. е., например,

$$N_z M_z - M_z N_z = 0.$$

Эти правила объединяются в следующую формулу:

$$M_{\mu\nu} M_{\sigma\tau} - M_{\sigma\tau} M_{\mu\nu} = i(\delta_{\nu\sigma} M_{\mu\tau} - \delta_{\nu\tau} M_{\mu\sigma} - \delta_{\mu\sigma} M_{\nu\tau} + \delta_{\mu\tau} M_{\nu\sigma}).$$

Теперь найдем представление операторов N, действующих на двухкомпонентный спинор u. Ясно, что N должна быть матрицей 2×2,

$$N_x = \begin{pmatrix} ? & ? \\ ? & ? \end{pmatrix}.$$

Мы могли бы заменить вопросительные знаки некоторыми неизвестными и получить для них уравнения, используя коммутационные соотношения и равенство $\mathbf{M} = \sigma/2$. Более простой путь основан на том, что любая матрица 2×2 может быть представлена линейной комбинацией матриц I, σ_x, σ_y, σ_z. Запишем поэтому

$$N_x = \alpha\mathrm{I} + a\sigma_x + g\sigma_y + h\sigma_z.$$

Заметим, что N_x и σ_x коммутируют. Поэтому $g = h = 0$. Итак,

$$N_x = \alpha\mathrm{I} + a\sigma_x, \quad N_y = \beta\mathrm{I} + b\sigma_y, \quad N_z = \gamma\mathrm{I} + c\sigma_z.$$

Подставим эти выражения в коммутационное соотношение

$$N_x M_y - M_y N_x = iN_z.$$

Имеем

$$(\alpha \mathrm{I} + a\sigma_x)(\sigma_y/2) - (\sigma_y/2)(\alpha \mathrm{I} + a\sigma_x) = i(\gamma \mathrm{I} + c\sigma_z),$$
$$ia\sigma_z = i(\gamma \mathrm{I} + c\sigma_z).$$

Поэтому

$$a = c, \qquad \gamma = 0.$$

С помощью циклической перестановки находим также

$$b = a, \qquad \alpha = \beta = 0.$$

Итак,

$$\mathbf{N} = a\boldsymbol{\sigma}.$$

Для того чтобы определить a, подставим эту формулу в коммутационное соотношение $N_x N_y - N_y N_x = iM_z$. Получим

$$a^2 = -\frac{1}{4}, \qquad a = \pm\frac{i}{2}.$$

Мы можем выбрать здесь любой знак. Допустим, что мы выбрали «+». Тогда

$$\mathbf{N} = i\frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}, \qquad \mathbf{M} = \frac{\boldsymbol{\sigma}}{2}.$$

Рассмотрим, однако, трансформационные свойства спинора, полученного отсюда с помощью зеркального отражения. При отражении $\mathbf{N} \to -\mathbf{N}$, поскольку $\mathbf{v} \to -\mathbf{v}$ и $\mathbf{N} \cdot \mathbf{v}$ есть скаляр; также $\mathbf{M} \to \mathbf{M}$. Таким образом, двухкомпонентный спинор и его зеркальное изображение не преобразуются одинаково при лоренцевых преобразованиях. Для того чтобы получить инвариантность относительно отражений, нужен четырехкомпонентный спинор.

Вводя обозначение $\sigma_v = (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{v})/|\mathbf{v}|$, запишем оператор, преобразующий спинор u при преобразовании Лоренца, в виде

$$\exp\left(-\sigma_v \frac{w}{2}\right),$$

где w — быстрота.

Рассмотрим, например, состояние плоской волны $u\exp(-ip\cdot x)$. Для преобразования Лоренца вдоль оси z

$$\sigma_y=\sigma_z \quad \text{и} \quad u'=\exp\left(-\sigma_z\frac{w}{2}\right)u.$$

Мы можем построить формулу для общего случая, рассмотрев преобразования для $u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ и $u=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Получаем

$$u=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \qquad u'=\exp\left(-\frac{w}{2}\right)\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},$$

$$u=\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \qquad u'=\exp\left(\frac{w}{2}\right)\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Поскольку оператор N не эрмитов, то произведение $\bar{u}u$ не является скаляром. Рассмотрим преобразование $\bar{u}u$:

$$\bar{u}'u'=\bar{u}\exp\left(-\sigma_z\frac{w}{2}\right)\exp\left(-\sigma_z\frac{w}{2}\right)u=\bar{u}\exp(-\sigma_z w)u.$$

Так как

$$\exp(-\sigma_z w)=1-\sigma_z w+\frac{w^2}{2!}-\sigma_z\left(\frac{w^3}{3!}\right)+\ldots=$$
$$=\left[1+\frac{w^2}{2!}+\frac{w^4}{4!}+\ldots\right]-\sigma_z\left[w+\frac{w^3}{3!}+\ldots\right],$$

то

$$\exp(-\sigma_z w)=\operatorname{ch} w-\sigma_z\operatorname{sh} w$$

и, следовательно,

$$\bar{u}'u=\operatorname{ch} w(\bar{u}u)-\operatorname{sh} w(\bar{u}\sigma_z u),$$

а также

$$\bar{u}'\sigma_z u'=\operatorname{ch} w(\bar{u}\sigma_z u)-\operatorname{sh} w(\bar{u}u).$$

Сразу видно, что пара $\bar{u}u$ и $\bar{u}\sigma_z u$ преобразуется при преобразовании Лоренца в точности как t, z:

$$\left.\begin{aligned}t'&=\gamma(t-vz)\\ z'&=\gamma(z-vt)\end{aligned}\right\} \quad \gamma=(1-v^2)^{-1/2}.$$

Для того чтобы заключить, что набор величин $\bar{u}u$, $\bar{u}\sigma u$ образует 4-вектор, следует проверить аналогию для $x'=x$, $y'=y$:

$$\bar{u}'\sigma_x u'=\bar{u}\exp\left(-\sigma_z\frac{w}{2}\right)\sigma_x\exp\left(-\sigma_z\frac{w}{2}\right)u=$$
$$=\bar{u}\exp\left(-\sigma_z\frac{w}{2}\right)\exp\left(\sigma_z\frac{w}{2}\right)\sigma_x u=\bar{u}\sigma_x u.$$

Таким образом, мы обнаружили новый 4-вектор, который обозначим символом S_μ:

$$S_\mu = \bar{u}\sigma_\mu u, \qquad \sigma_\mu \equiv (1, \boldsymbol{\sigma}).$$

Оказывается, что S_μ может служить удовлетворительным выражением для тока вероятности. Как и ранее, используем нормировку $u\bar{u}=2E$. Имеем тогда

$$\bar{u}\sigma_\mu u = 2p_\mu, \qquad S_\mu = 2p_\mu.$$

Пусть спин частицы направлен вверх по оси z,

$$u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{u}u = 1, \quad \bar{u}\sigma_z u = 1, \quad \bar{u}\sigma_x u = \bar{u}\sigma_y u = 0.$$

Здесь возникает трудность, поскольку ток вероятности $\bar{u}\sigma_z u$ всегда устремляется по оси z. Это означает, что такой ток вероятности не может представлять покоящуюся частицу.

Заметим, что для данного случая имеет место соотношение $(\bar{u}u)^2=(\bar{u}\sigma u)^2$, инвариантное относительно вращений. Поскольку спинор представляет частицу со спином, направленным вдоль некоторой оси, скажем z, заключаем, что это соотношение верно в общем случае. Таким образом, всегда

$$S_\mu S_\mu = 0,$$

и если $S_\mu = 2p_\mu$, то должно быть

$$p_\mu p_\mu = 0, \quad \text{а также} \quad m = 0.$$

Следовательно, данное рассмотрение справедливо лишь для частиц с массой 0 (и спином $^1/_2$). Нам известна только одна такая частица—нейтрино. Можно доказать в общем случае соотношение

$$S_\mu \sigma_\mu u = 0.$$

(Докажите его сначала для $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, а затем найдите аргументы в пользу того, что оно верно для любого u.) Если мы положим $S_\mu = 2p_\mu$, то должны иметь

$$p_\mu \sigma_\mu u = 0,$$

или

$$(E - \mathbf{p}\cdot\boldsymbol{\sigma})u = 0.$$

Последнее соотношение можно взять в качестве закона, описывающего нейтрино. Оно справедливо для каждой плоской волны и, следовательно, для суперпозиции таких волн,

$$\int (E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) c_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} \exp(-ip \cdot x) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} = 0,$$

где $c_{\mathbf{p}}$ — некоторая функция импульса. Мы можем также превратить его в уравнение в координатном пространстве. Такое уравнение есть просто

$$\int i\nabla_\mu \sigma_\mu \left[c_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} \exp(-ip \cdot x) \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \right] = 0,$$

или

$$i\nabla_\mu \sigma_\mu \varphi(x) = 0,$$

где

$$\varphi(x) = \int c_{\mathbf{p}} u_{\mathbf{p}} \exp(-ip \cdot x) \frac{d^3p}{(2\pi)^3}.$$

Расписанное в полном виде общее уравнение будет

$$\left[\frac{\partial}{\partial t} + \boldsymbol{\sigma} \cdot \nabla \right] \varphi(\mathbf{x}, t) = 0.$$

Обозначим $\sigma_{\mathbf{p}} \equiv (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{p})/|\mathbf{p}|$. Поскольку $p = E$, то уравнение $(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u = 0$ эквивалентно соотношению

$$\sigma_{\mathbf{p}} u = u,$$

означающему, что частица всегда вращается по часовой стрелке относительно направления движения. В действительности из эксперимента мы знаем, что нейтрино вращается против часовой стрелки. Напомним, однако, что для этого есть вторая возможность в выборе знака для N.

Для $\mathbf{N} = -i\boldsymbol{\sigma}/2$ мы получим, что величина

$$S'_\mu \equiv (\bar{u}u, \ -\bar{u}\boldsymbol{\sigma}u)$$

преобразуется подобно 4-вектору.

В этом случае получаем уравнение

$$(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) v = 0.$$

Частица, описываемая спинором v, вращается против часовой стрелки,

$$\sigma_{\mathbf{p}} v = -v.$$

Существенно отметить, что u и v преобразуются разными способами:

$$u' = \exp\left(-\sigma_v \frac{w}{2}\right) u, \qquad v' = \exp\left(+\sigma_v \frac{w}{2}\right) v.$$

Мы будем называть u и v коспинором и контраспинором. Соответствующие преобразования называются ковариантными и контравариантными.

23. ОБОБЩЕНИЕ НА КОНЕЧНУЮ МАССУ

В лекции 22 мы убедились, что $S_\mu = (\tilde{u}\sigma_\mu u)$ преобразуется как 4-вектор. Это означает, что для произвольного B_μ выражение

$$B_\mu (\tilde{u}\sigma_\mu u)$$

есть инвариант.

Поэтому

$$B_\mu \sigma_\mu u$$

при лоренцевых преобразованиях преобразуется отлично от u.

Поскольку $\tilde{u}' = \tilde{u} \exp\left(-\sigma_v \frac{w}{2}\right)$, то

$$(B_\mu \sigma_\mu u)' = \exp\left(\sigma_v \frac{w}{2}\right)(B_\mu \sigma_\mu u).$$

Таким образом, $B_\mu \sigma_\mu u$ преобразуется как контравариантный спинор (если u — коспинор); если же v — контраспинор, то $B_\mu \sigma_\mu v$ — ковариантный спинор.

Обобщение на конечную массу. Мы установили, что для частиц спина $^1/_2$ массы 0 уравнения движения суть

$$(E - \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u = 0 \quad \text{правовинтовое,}$$
$$(E + \mathbf{p} \cdot \boldsymbol{\sigma}) u = 0 \quad \text{левовинтовое.}$$

Заметим, что подобные уравнения не инвариантны относительно пространственных отражений, поскольку $\mathbf{p}$ есть полярный вектор, а $\boldsymbol{\sigma}$ — аксиальный. (Несколько лет назад такой причины было достаточно для того, чтобы отвергнуть эти уравнения — как и поступил Паули 25 лет назад в книге «Общие принципы волновой механики», стр. 254 *) — но теперь мы знаем, что четность не сохра-

*) Цитируется по русскому переводу 1957 г. (*Прим. перев.*)