

в  $Y$ , полюс пропагатора *свободной частицы* находится в  $p^2 = m^2$ . Однако, проводя измерения в  $X$  и  $Y$ , мы не можем определить, испускал и поглощал ли электрон какое-либо число фотонов. Такие процессы, простейший из которых приведен на рисунке, приводят к сдвигу положения полюса. Физически это означает, что та масса, которую мы измеряем (*«экспериментальная»* масса  $m_{\text{эксп}}$ ), не есть *«голая»* масса, но что-то другое, включающее эффекты упомянутых виртуальных процессов. Математически мы определяем экспериментальную массу как положение полюса пропагатора с учетом указанных выше процессов. Это обсуждение показывает, что *«голая»* масса (которую мы теперь обозначим  $m_0$ ) фактически не является непосредственно наблюдаемой. Используя этот факт, мы можем изобрести рецепт, который обходит (но не *«решает»*) трудности с расходимостями в электродинамике. Однако это процедура отказывается служить для произвольных моделей взаимодействия, например, в псевдовекторной теории мезон-нуклонного взаимодействия.

## 28. СОБСТВЕННАЯ ЭНЕРГИЯ ЭЛЕКТРОНА

Проблема собственной энергии электрона не является новой: она появилась в классической физике. Если предположить, что электрон является шариком радиуса  $a$ , причем весь его заряд расположен на поверхности, то полная электростатическая энергия равна  $E_0 = e^2/2a$ . Возможно, что масса электрона  $m$  соответствует этой энергии. Однако, если вы сосчитаете импульс  $P$  поля, когда электрон движется со скоростью  $v$  (с учетом лоренцева сокращения шарика), то получите  $P = -(4/3) E_0 v / (1 - v^2)^{1/2}$ . Эта величина соответствует частице с массой  $m = (2/3)(e^2/a)$ . Пуанкаре предположил, что какие-то силы должны удерживать части шарика и что эти силы должны давать добавки в энергию. Однако не существует надежной теории таких сил.

Эта собственная энергия происходит от энергии, необходимой для того, чтобы *«собрать»* заряд. Можно считать, что это есть энергия взаимодействия одной части заряда электрона с другой. Казалось бы, что возможный

способ избавиться от подобных эффектов состоит в том, чтобы запретить электрону воздействовать на самого себя — т. е. предположить, что электроны действуют только друг на друга. (Тогда электрон мог бы быть точечным зарядом.) Однако действие электрона самого на себя необходимо для объяснения реального явления, явления радиационного трения. Ускоряемый заряд излучает, теряя энергию, поэтому ускоряющая сила должна производить работу. Против каких сил? Согласно классической физике — против силы, создаваемой действием одной части заряда на другую.

Вы можете рассчитать силу  $F$ , действующую на движущийся заряженный шарик, благодаря действию электромагнитного поля одной части шарика на его другие части. Эта сила равна

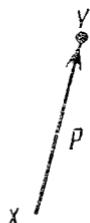
$$F = \frac{2}{3} \frac{e^2}{a} \vec{x} + \frac{2}{3} \frac{e^2}{c^3} \vec{x} + O(a).$$

Первый член согласуется с массой, вычисленной из импульса поля. Второй член есть сила реакции излучения, испущенного электроном, и не зависит от  $a$ . Однако было бы непоследовательным устремить  $a$  к нулю. Распределенный заряд никогда не был тщательно проанализирован. Возникают вопросы, связанные с внутренними движениями и т. п.

В действительности эти вопросы в классической физике решались различными путями, но ни один из них не был успешно перенесен в квантовую механику (ссылки см. в работе Фейнмана [10]).

**Перенормировка массы.** Обсудим теперь аналог этой задачи в квантовой механике — перенормировку массы. Рассмотрим амплитуду электрона, движущегося между точками  $X$  и  $Y$ . Диаграмма низшего порядка дает

$$\text{Амп.} = Y \frac{1}{\hat{p} - m} X.$$



Возможно также, что при движении от  $X$  к  $Y$  электрон испустит и поглотит виртуальный фотон. В этом случае

$$\text{Амп.} = Y 4\pi e^2 \int \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \times \\ \times \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \frac{1}{\hat{p} - m} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4} X = Y \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} X,$$



где величина

$$C = 4\pi e^2 \int \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - \hat{k} - m} \gamma_\mu \frac{1}{k^2} \frac{d^4 k}{(2\pi)^4}$$

является инвариантной функцией вида  $C = A(p^2) \hat{p} + B(p^2)$ . Каков ее физический смысл? Допустим, что  $C$  мала. Тогда первые два члена могут быть записаны в виде

$$Y \frac{1}{\hat{p} - m} X + Y \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} X = Y \frac{1}{\hat{p} - m - C} X$$

благодаря тому, что

$$\frac{1}{\hat{p} - m - C} = \frac{1}{\hat{p} - m} + \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} + \\ + \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} + \dots$$

(Последняя формула является частным случаем более общего операторного соотношения

$$\frac{1}{A - B} = \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \frac{1}{A} B \frac{1}{A} B \frac{1}{A} + \dots$$

Если бы  $C$  была числом, мы могли бы рассматривать ее как поправку к массе. Первый и второй члены этого ряда суть амплитуды движения электрона без и с одним

виртуальным фотоном соответственно. Легко проверить, что третий член соответствует вкладу с двумя фотонами

$$\text{Амп.} = Y \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} C \frac{1}{\hat{p} - m} X,$$



четвертый член — вкладу с тремя фотонами и т. д. Однако такие диаграммы содержат лишь процессы, в которых в каждый данный момент содержится не более одного

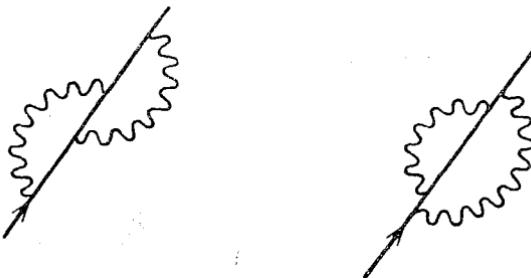


Рис. 28-1.

фотона. Примеры диаграмм другого типа с двумя виртуальными фотонами приведены на рис. 28-1. Мы не будем сейчас принимать во внимание такие диаграммы, так как они добавляют в  $C$  члены порядка  $e^4$ , когда мы записываем полную амплитуду распространения электрона между  $X$  и  $Y$  в виде

$$\frac{1}{\hat{p} - m - C} = \frac{1}{\hat{p} - m - A\hat{p} - B},$$

где  $A$  и  $B$  — функции от  $p^2$ . Полюс этого пропагатора дает соотношение между энергией и импульсом свободной частицы и поэтому определяет экспериментально наблюдаемую массу  $m_{\text{эксп.}}$ .

Избавляясь от матриц в знаменателе

$$\frac{1}{(1 - A)\hat{p} - (m + B)} = \frac{(1 - A)\hat{p} + (m + B)}{(1 - A)^2 p^2 - (m + B)^2},$$

мы получаем, что положение полюса определяется решением уравнения

$$[1 - A(p^2)]^2 p^2 - [m + B(p^2)]^2 = 0.$$

Заметим здесь, что наличие второго полюса может быть истолковано как существование другой частицы (вероятно,  $\mu$ -мезона). Предполагая, что  $A \ll 1$  и  $B \ll m$ , мы можем положить  $A(p^2) = A(m^2)$  и  $B(p^2) = B(m^2)$ . Тогда

$$p^2 = \left[ \frac{m + B(m^2)}{1 - A(m^2)} \right]^2 = m_{\text{эксп}}^2,$$

или

$$m_{\text{эксп}} = \frac{m + B}{1 - A} = m + \delta m,$$

где

$$\delta m = B(m^2) + mA(m^2).$$

Таким образом, пропагатор имеет полюс при  $\hat{p} = m_{\text{эксп}}$  и для  $p^2$ , близких к  $m_{\text{эксп}}^2$ , ведет себя как некоторая константа (вычет в полюсе), умноженная на  $(\hat{p} - m_{\text{эксп}})^{-1}$ . Обозначим вычет при  $p^2 = m_{\text{эксп}}^2$  через  $1 + r$ . Можно теперь переписать пропагатор следующим образом:

$$\frac{1 + r}{\hat{p} - m_{\text{эксп}}}$$

( $r$  может быть выражено через  $A$ ,  $B$  и их производные  $A'(p^2)$ ,  $B'(p^2)$  в точке  $p^2 = m_{\text{эксп}}^2$ ). Отклонение от обычной формы  $(\hat{p} - m_{\text{эксп}})^{-1}$  можно интерпретировать как поправку к константе связи фотона [11] (поскольку множитель  $1 + r$  в пропагаторе можно получить, умножая каждую фотонную вершину на  $(1 + r)^{1/2}$ ). Следующий шаг заключается в том, чтобы вычислить функции  $A$  и  $B$ . Для этой цели следует вычислить интеграл

$$\int \gamma_\mu \frac{\hat{p} - \hat{k} + m}{p^2 - 2p \cdot k + k^2 - m^2} \gamma_\mu \frac{d^4 k}{k^2}.$$

Используя соотношения

$$\gamma_\mu \gamma_\mu = 4, \quad \gamma_\mu \hat{a} \gamma_\mu = -2\hat{a},$$

избавляемся от  $\gamma_\mu$ . При вычислении  $\delta m$  можно положить  $p^2 = m^2$ , тогда получаем

$$\int \frac{-2(\hat{p} - \hat{k}) + 4m}{-2p \cdot k + k^2} \frac{d^4k}{k^2}.$$

Этот интеграл расходится. При больших значениях  $k$  первый знаменатель может быть заменен на  $k^2$ . Тогда член, содержащий  $\hat{k}$ , исчезает в силу соображений симметрии. Остальная часть подынтегрального выражения ведет себя при больших  $k$  как  $k^3 dk/k^4$ , и поэтому интеграл логарифмически расходится. Квантовая электродинамика ударила лицом в грязь!

Бете заметил, что данная бесконечность является единственной существенной в электродинамике (за исключением еще одной, которую мы обсудим позднее). Пусть у нас есть способ сделать этот интеграл «на время» сходящимся. Допустим, например, что пропагатор  $1/k^2$  всегда следует умножать на релятивистски-инвариантный множитель  $C(k^2)$ , обеспечивающий сходимость.

Если положить

$$C(k^2) = -\frac{\lambda^2}{k^2 - \lambda^2}$$

(такой  $C(k^2)$  обрезает интеграл при больших  $k^2$  и  $C(0)=1$ ), то интеграл может быть вычислен. Получаем (методы вычисления см. в ссылке [11])

$$\delta m = m \frac{3e^2}{2\pi} \left[ 3 \ln \frac{\lambda}{m} + \frac{3}{4} \right],$$

пренебрегая членами, исчезающими вместе с  $m/\lambda$ .

Если вам придется вычислять любой процесс в высшем порядке, то вы встретите член, пропорциональный  $\ln(\lambda/m)$  (для частиц со спином  $1/2$  — электронов, взаимодействующих лишь с фотонами, не встретится ничего более плохого, чем логарифмические расходимости). Затем, где бы вы ни встретили  $m$ , подставьте вместо него  $m_{\text{эксп}} - \delta m$  и разложите до первой степени по  $\delta m$ . Чудо заключается в том, что полный коэффициент при  $\ln(\lambda/m)$  обратится в нуль. Остальные члены имеют определенный предел при  $\lambda \rightarrow \infty$ . Другими словами, значение параметра обрезания не появляется в окончательном выражении, если мы всегда выражаем ответ через экспе-

риментальную массу и устремляем  $\lambda \rightarrow \infty$  при фиксированном  $m_{\text{эксп.}}$ .

Используя подобные идеи, Бете попробовал вычислить смещение энергетических уровней в атоме водорода, обусловленное собственной энергией связанного электрона. Толчок был дан экспериментом Резерфорда и Лэмба, которые обнаружили, используя микроволновую технику, расщепление примерно в 1000 МГц между уровнями  $2S_{1/2}$  и  $2P_{1/2}$  в водороде. Если пренебречь взаимодействием с полем излучения, то эти уровни должны быть полностью вырождены. Бете произвел неполное вычисление, используя нерелятивистское приближение. Быстрое развитие квантовой электродинамики в 1948—1949 гг. последовало в результате усилий сформулировать его и Вайскопфа идеи в релятивистски-инвариантной форме и закончить его вычисления.

Итак, мы нашли еще одно правило, которое должно быть включено в квантовую электродинамику: (1) введите произвольный фактор обрезания

$$C(k^2) = \lambda^2 / (\lambda^2 - k^2)$$

к каждому пропагатору  $1/k^2$ ; (2) выразите ответ через  $m_{\text{эксп.}} = m - \delta m$ ; (3) перейдите к пределу  $\lambda \rightarrow \infty$  при фиксированном  $m_{\text{эксп.}}$ .

Швингер вычитал бесконечности из подынтегрального выражения, но его метод чрезвычайно сложен с практической точки зрения. Оказывается также, что он совершенно эквивалентен сформулированному правилу.

Все ли в порядке в описанной процедуре? Это, разумеется, весьма сомнительный рецепт. Вайскопф заметил однажды, что только, если бы Господь снабдил нас и заряженным, и нейтральным электронами, введение  $\delta m$  было бы оправдано.

В действительности в природе встречаются примеры, в которых техника обрезания не работает; например,  $\pi^+$ ,  $\pi^0$  и  $\pi^-$ . Массы  $\pi^+$  и  $\pi^0$  отличаются, но вычисления приводят к квадратичным расходимостям. При проведении подобных расчетов частицы считаются точечными. В действительности следует учитывать облако нуклонных пар, и некоторые считают, что такой учет приведет к устранению расходимостей. Однако подобные утверждения никогда не были доказаны.