

29. КВАНТОВАЯ ЭЛЕКТРОДИНАМИКА

Возможно ли проводить вычисления в квантовой электродинамике, заменив пропагатор $1/k^2$ на

$$-\frac{1}{k^2} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - k^2}$$

и считая λ конечной величиной? Тогда нам не встретилось бы расходимостей, а параметр обрезания λ можно было бы считать новой константой теории. К сожалению, такое построение не является внутренне последовательным.

Пусть, например, у нас есть атом в возбужденном состоянии. Вычислим две вероятности: (1) вероятность того, что он распадется (т. е. излучит фотон); (2) вероятность того, что он останется в возбужденном состоянии. Сумма этих двух вероятностей отличается от единицы на множитель, пропорциональный m^2/λ^2 . Вероятность не сохраняется! Вы можете также увидеть это, записав исправленный пропагатор в форме

$$\frac{1}{k^2} - \frac{1}{k^2 - \lambda^2}.$$

Такое представление отвечает введению пропагатора $-(k^2 - \lambda^2)^{-1}$ для лишнего «фотона» или частицы массы λ . Знак минус означает, что его взаимодействие пропорционально $-e^2$, а не $+e^2$, т. е. такой фотон должен иметь мнимую константу связи *ie*. Гамильтониан оказывается не эрмитовым, вероятность не сохраняется, возникает хаос.

Никому не удалось решить такую задачу: построить теорию, которая была бы совместной с общими принципами квантовой механики (суперпозиция амплитуд) и теорией относительности и содержала бы произвольную функцию. Невозможно модифицировать пропагатор $1/k^2$, не разрушив всю теорию. Обратите внимание на то, что такая трудность не возникает в нерелятивистской квантовой механике, где имеется произвольная функция — потенциал $V(r)$, который можно выбирать из широкого класса. Относительность плюс квантовая механика, по-видимому, приводят к очень сильным ограничениям, но мы, кроме того, несомненно, добавляем

некоторые неизвестные неявные предположения (такие, как существование бесконечно малых расстояний в пространстве).

Мы вычислили суммарный вклад в собственную энергию от диаграмм, изображенных на рис. 29-1, и обнаружили, что он расходится логарифмически. Однако есть

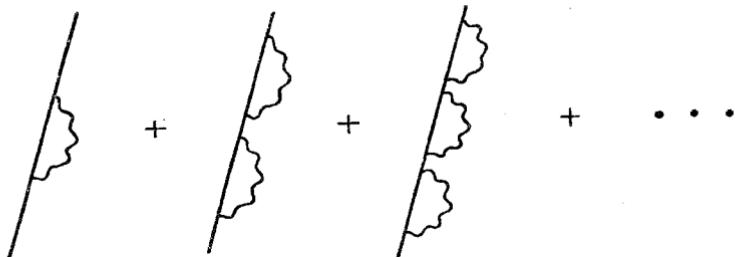


Рис. 29-1.

еще диаграммы типа, показанного на рис. 29-2. Соответствующий член дает вклад порядка e^4 в C и, следовательно, в δm . Он пропорционален $e^4 [\ln(\lambda/m)]^2$. Могло бы оказаться, что при учете всех таких диаграмм собственная



Рис. 29-2.



Рис. 29-3.

энергия стала бы конечной. Гелл-Манн и Лоу просуммировали подобные члены, содержащие высшие степени $\ln(\lambda/m)$, и показали, что результат все еще расходится. Оказывается, что C имеет вид

$$\frac{\lambda^2}{p^2} ae^2 + be^2 + \dots,$$

где a, b, \dots — численные коэффициенты. Имеется еще

один новый тип диаграмм, который следовало бы обсудить. В таких диаграммах рождается пара, которая затем аннигилирует. Примеры подобных диаграмм приведены на рис. 29-3.

Обратимся к некоторым эффектам от виртуальных фотонов (радиационным поправкам). Рассмотрим, например, рассеяние электрона на потенциале $V(r)$ (см. обсуждение смысла потенциала в лекции 30). Диаграммы

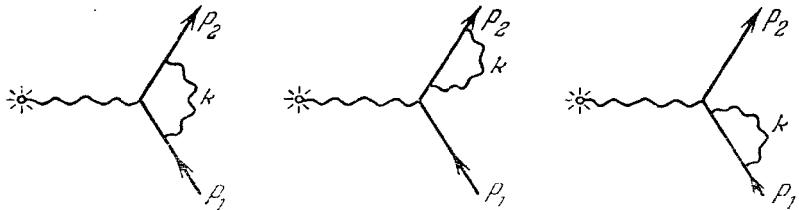


Рис. 29-4.

низшего порядка, содержащие виртуальные фотоны, показаны на рис. 29-4. Поправка к константе связи (множитель $(1+r)$ в пропагаторе) сокращается, когда мы добавляем вклады от трех приведенных диаграмм. Чистый эффект, при достаточно малых энергиях, состоит в слаживании потенциала на расстояниях порядка комптоновской длины волны. Очень грубо:

$$V(r) \rightarrow V(r) + \text{const} \frac{e^2}{m^2} \nabla^2 V(r).$$

В атоме такое изменение потенциала приводит к смещению энергетических уровней. Рассмотрим атом водорода.

Для чисто кулоновского потенциала между электроном и протоном теория Дирака предсказывает, что $2S_{1/2}$ - и $2P_{1/2}$ -состояния имеют в точности одинаковую энергию. Однако мы видели, что эффективный протон-электронный потенциал содержит член, пропорциональный

$$\nabla^2 V(r) = -4\pi\rho \quad (\rho \text{ — плотность заряда протона}).$$

Поскольку ρ исчезает везде, кроме окрестности начала координат, этот член влияет только на энергию S -уровня, который сдвигается примерно на 1000 МГц. Если учесть

также поправку от диаграммы рис. 29-5 (вакуумная поляризация), то теория предсказывает сдвиг $1057,3 \pm 0,1$ МГц. Эта цифра слегка противоречит эксперименту

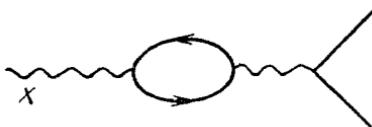


Рис. 29-5.

и, вероятно, следует провести вычисления в следующем порядке теории возмущений.

Если внешний потенциал соответствует магнитному полю, то эффект виртуальных фотонов приводит к изменению магнитного момента электрона. Этот магнитный момент μ_e был вычислен до порядка e^4 , и результат имеет вид

$$\mu_e = \mu_0 \left[1 + \frac{e^2}{2\pi} - 0,328 \frac{e^4}{\pi^4} \right] = \mu_0 \cdot 1,0011596,$$

где $\mu_0 = e/2m$. (Правильный коэффициент при e^4 был лишь недавно получен Питерманом и Зоммерфилдом. Первое вычисление Карплуса и Кролла дало 2,973.) Магнитный

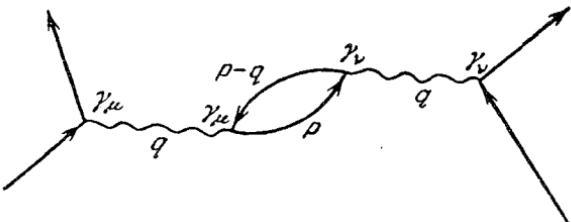


Рис. 29-6.

момент измеряется по отношению μ_e/μ_p (μ_p — магнитный момент протона). Измерения μ_e/μ_p весьма точны. Однако сейчас имеются два экспериментальных значения, противоречащих друг другу: одно дает $\mu_e/\mu_0 = 1,001146 \pm 0,000012$, а другое — $1,001165 \pm 0,000011$ (ссылка [12]).

Перенормировка заряда. Как я уже говорил, в электродинамике есть еще одна бесконечность. Она соответствует диаграммам типа рис. 29-6, в которых содержатся виртуальные электрон-позитронные пары. Мы снова можем

просуммировать диаграммы, приведенные на рис. 29-7. Соответствующий ряд имеет вид

$$\frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} X \frac{1}{q^2} + \frac{1}{q^2} X \frac{1}{q^2} X \frac{1}{q^2} + \dots = \frac{1}{q^2 - X},$$

где X — вклад электрон-позитронной петли.

Оказывается, что при малых q^2 вклад $X = q^2 Y$, где Y стремится к постоянной (в действительности это верно во всех порядках по e^2).

Поэтому

$$\frac{1}{q^2 - X} = \frac{1}{1 - Y} \frac{1}{q^2}.$$

Полюс пропагатора по-прежнему находится в $q^2 = 0$. Поэтому масса покоя электрона остается равной нулю.

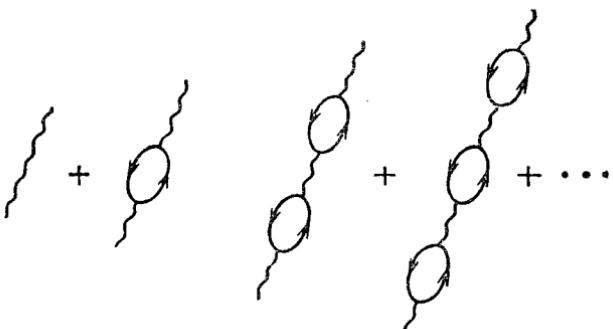


Рис. 29-7.

Однако множитель $(1 - Y)^{-1}$ всегда будет умножаться на e^2 . Поэтому экспериментально измеряемый заряд $e_{\text{эксп}}$ равен

$$e_{\text{эксп}} = \frac{e}{(1 - Y)^{1/2}}.$$

Этот эффект называется перенормировкой заряда. Однако при вычислении Y вы опять получите бесконечность. Можно, конечно, поправить эту логарифмическую расходимость так же, как это было сделано с массой. Как мы видели, можно привести физический пример перенормировки массы: разность масс заряженной и нейтральной частиц (см. лекцию 28). В то же время нет

способа придать физический смысл перенормировке заряда. Однако мы знаем, что

$$e_{\text{эксп}}^2 = \frac{1}{137,0369}.$$

Допустим, что будущая теория даст какую-либо простую формулу для теоретического значения заряда. Например, корень функции Бесселя или что-нибудь вроде

$$e_{\text{теор}}^2 = \frac{1}{144}.$$

Но для сравнения с экспериментом необходимо провести перенормировку заряда, в результате которой вы получите $e_{\text{эксп}}^2 = 1/137$. Все это, разумеется, чистая фантазия!

Посмотрим теперь, что же такое есть X . Нам следует вычислить вклад диаграммы рис. 29-8.

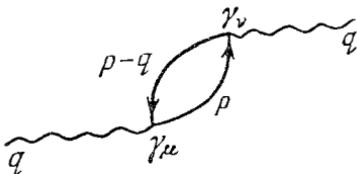


Рис. 29-8.

Следуя электронной линии вдоль замкнутой петли, мы получаем

$(4\pi)^{1/2} e \gamma_\mu$ — амплитуда аннигиляции фотона,

$(\hat{p} - m)^{-1}$ — амплитуда распространения электрона между двумя фотонными вершинами,

$(4\pi)^{1/2} e \gamma_\nu$ — амплитуда искускания фотона с поляризацией ν ,

$(\hat{p} - \hat{q} - m)^{-1}$ — амплитуда распространения электрона назад к исходной точке.

Полная амплитуда есть поэтому

$$4\pi e^2 \bar{U}_i \frac{1}{\hat{p} - \hat{q} - m} \gamma_\nu \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\mu U_i,$$

где U_i — начальное состояние электрона (которое не должно удовлетворять уравнению Дирака, поскольку оно представляет виртуальный электрон). Однако все возможные импульсы p и начальные состояния U_i могут возникнуть. Поэтому

$$X_{\nu p} = 4\pi e^2 \int \text{Sp} \left\{ \frac{1}{\hat{p} - \hat{q} - m} \gamma_\nu, \frac{1}{\hat{p} - m} \gamma_\mu \right\} \frac{d^4 p}{(2\pi)^4}.$$

Детали вычисления интеграла содержатся в ссылке [11]. Предложение о том, как избавиться от



Рис. 29-9.

бесконечности, было впервые дано Паули и Бете. Оказывается невозможным модифицировать электронный propagator введением обрезающего множителя, поскольку при этом нарушается градиентная инвариантность результата. Вместо этого следует построить подынтегральное выражение, используя массу электрона m , а затем вычесть из него такое же выражение, соответствующее некоторой другой массе M . Результат все еще логарифмически расходится, но может быть сделан сходящимся заменой e на $e_{\text{акн}}$.

Перенормировка заряда связана не только с виртуальными парами электрон-позитронов, но также с парами

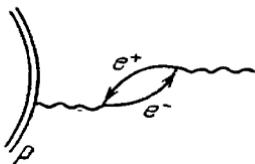


Рис. 29-10.

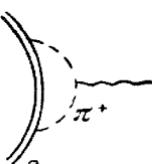
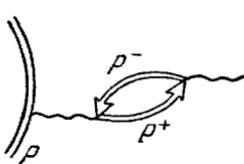


Рис. 29-11.

любых заряженных частиц-античастиц. Отличается ли в результате перенормированный заряд электрона от, скажем, заряда протона? Ответ отрицателен. Если элек-

рон-фотонное взаимодействие модифицируется диаграммами типа рис. 29-9, то в протон-фотонное взаимодействие дают вклад подобные диаграммы (см. рис. 29-10). (В действительности, если мы учитываем мезоны, то есть еще дополнительные диаграммы, изображенные на рис. 29-11. Они дают вклад в аномальный магнитный момент, но не меняют полного заряда нуклонов.)

30. МЕЗОННАЯ ТЕОРИЯ

Вам уже приходилось видеть уравнение Дирака (или уравнение Шредингера), записанное в форме

$$(i\hat{\nabla} - \hat{A} - m)\Psi = 0,$$

где \hat{A} есть *внешний* потенциал. Важно установить, что этот результат представляет собой приближение к правилам, которые мы установили, и может быть получен из них. Зададим поэтому вопрос: при каких условиях часть взаимодействия может быть описана внешним потенциалом?

Рассмотрим взаимодействие электрона с некоторым объектом (детали которого не существенны), рождающим

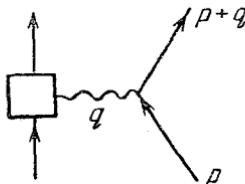


Рис. 30-1.

виртуальные фотоны, причем амплитуда рождения виртуального фотона с импульсом q и поляризацией μ равна $A_\mu(q)$. Тогда матрица, описывающая взаимодействие, изображенное на рис. 30-1, равна

$$\int \frac{1}{\hat{p} + \hat{q} - m} \gamma_\mu \frac{1}{\hat{p} - m} A_\mu(q) \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}.$$

Здесь $p+q$ — «истинный» 4-импульс электрона, поглотившего фотон.