ГЛАВА 1

ДВОЙНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ

Понятие определенного интеграла

$$\int_a^b f(x)\,dx$$

связано с такими задачами, как вычисление пройденного пути по заданной скорости, нахождение площади криволинейной трапеции и т. д. Существует много задач, аналогичных названным, но относящихся к функциям не одной, а нескольких, скажем двух, независимых переменных. Типичная задача такого рода — нахождение объема криволинейного цилиндра (трехмерный аналог криволинейной трапеции).

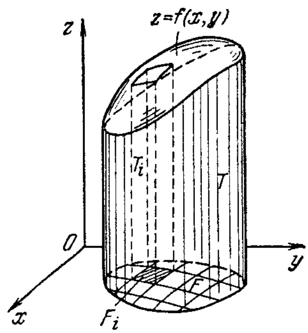

Рис. 1.1.

Под криволинейным цилиндром с основанием F, лежащим в плоскости xy, понимается тело T, ограниченное этим основанием, некоторой поверхностью $z=f(x, y)$ и боковой цилиндрической поверхностью (рис. 1.1). Объем такого тела естественно искать следующим образом. Разобьем основание F сетью кривых на ячейки F_i; тогда весь цилиндр T разобьется на цилиндрические столбики T_i, основаниями которых служат ячейки F_i. Ясно, что объем цилиндра T следует считать равным сумме объемов составляющих его столбиков T_i.

Чтобы вычислить объем столбика T_i, выберем в F_i некоторую точку (ξ_i, η_i) и заменим цилиндрический столбик T_i с «кривым» верхним основанием «настоящим» цилиндром с постоянной высотой, равной $f(\xi_i, \eta_i)$, и тем же основанием F_i. Иначе говоря, объем столбика T_i примем (приближенно) равным

$$f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i,$$

где ΔS_i — площадь ячейки F_i. За приближенное значение объема всего цилиндра T примем сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i, \tag{1.1}$$

взятую по всем ячейкам, на которые разбито основание F. Интуитивно ясно, что сумма (1.1) будет представлять объем цилиндра T с точностью тем большей, чем меньше размеры ячеек F_i. Для получения точного значения этого объема нужно в выражении (1.1) перейти к пределу, неограниченно уменьшая размеры ячеек F_i.

Этот предельный переход и приведет нас к понятию интеграла от функции $f(x, y)$ двух независимых переменных — так называемому *двойному интегралу*. Изучение двойных интегралов составит содержание настоящей главы.

Очевидна аналогия между изложенными (пока лишь наводящими) рассуждениями и построением определенного интеграла на отрезке. Отличие их состоит лишь в том, что здесь рассматриваются функции не одной, а двух переменных, а вместо длин отрезков Δx_i берутся площади тех ячеек F_i, на которые разбивается фигура F, служащая основанием цилиндра.

Помимо задачи о вычислении объема криволинейного цилиндра, существует много других задач, также связанных с понятием двойного интеграла. Некоторые из них будут рассмотрены в § 4 этой главы.

Ряд физических и геометрических задач приводит к понятию интеграла от функций трех и большего числа переменных. Изучению таких интегралов будет посвящена следующая глава.

Уже рассмотренная выше задача о вычислении объема криволинейного цилиндра показывает, что понятие двойного интеграла существенно опирается на понятие площади криволинейной плоской фигуры, поскольку в выражение (1.1) входят площади ΔS_i криволинейных ячеек F_i, на которые мы разбили основание цилиндра. Поэтому, хотя с понятием площади читателю приходилось встречаться и раньше *), мы начнем эту главу с краткого изложения основных сведений о площадях.

§ 1. Некоторые вспомогательные понятия. Площадь плоской фигуры

1. Граничные и внутренние точки. Область. Напомним некоторые необходимые для дальнейшего понятия. Пусть a — некоторая точка на плоскости. Открытый круг радиуса ε с центром

*) См. вып. 1, гл. 11, § 2.

в точке a *) называется *ε-окрестностью* или просто *окрестностью* этой точки. Точка a, принадлежащая данному множеству A, называется его *внутренней точкой*, если некоторая «достаточно малая» ε-окрестность точки a целиком состоит из точек множества A. Множество, все точки которого внутренние, называется *открытым множеством*. Говорят, что открытое множество G *связно*, если любые две его точки можно соединить непрерывной кривой, целиком принадлежащей G. Связное открытое множество короче называется *областью*.

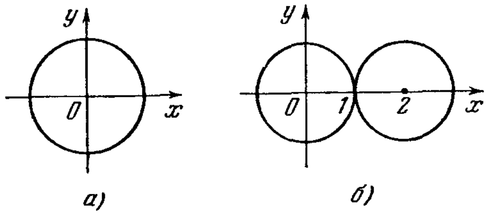

Рис. 1.2.

Например, совокупность точек, координаты которых удовлетворяют условию $x^2+y^2<1$, есть область (рис. 1.2, *а*). Множество, состоящее из двух кругов $x^2+y^2<1$ и $(x-2)^2+y^2<1$, не область: оно открыто, но не связно (рис. 1.2, *б*).

Точка a называется *граничной* для множества A, если любая ее окрестность содержит точки, как принадлежащие, так и не принадлежащие A. Сама граничная точка при этом может принадлежать A, а может ему и не принадлежать. В частности, открытое множество не содержит ни одной своей граничной точки. Совокупность всех граничных точек множества называется его *границей*. Множество, содержащее все свои граничные точки, называется *замкнутым*. Каждое множество может быть превращено в замкнутое присоединением к нему всех его граничных точек. В частности, присоединив к некоторой области G все ее граничные точки, мы получим множество, называемое *замкнутой областью*.

Точка a называется *предельной* для множества A, если в A существует последовательность попарно различных точек $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, сходящаяся к a. Предельная точка множества A может принадлежать, а может и не принадлежать A. Замкнутые множества, и только они, содержат все свои предельные точки. (Докажите это!)

Множество называется *ограниченным*, если его можно поместить внутрь некоторого достаточно большого круга. Пусть A — ограниченное множество. Обозначим $\rho(a_1, a_2)$ расстояние между двумя его произвольными точками. Пусть теперь a_1 и a_2 пробегают (независимо друг от друга) все множество A. Ясно, что множество чисел $\rho(a_1, a_2)$ ограничено сверху ($\rho(a_1, a_2)$ не может превысить диаметр круга,

---

*) То есть совокупность всех точек плоскости, расстояние которых от a строго меньше ε.

в котором помещается A). Точная верхняя грань чисел $\rho(a_1, a_2)$ называется *диаметром* $d(A)$ множества A (рис. 1.3).

Если множество A есть часть множества B (или совпадает с ним), то мы будем обозначать это, как обычно, символом $A \subset B$. Принадлежность точки a множеству A записывается так: $a \in A$.

Рис. 1.3.

Объединение двух множеств A и B, т. е. совокупность точек, принадлежащих хотя бы одному из них, мы обозначим $A+B$, а *общую часть* множеств A и B, т. е. совокупность точек, принадлежащих и A и B одновременно, обозначим AB.

2. Расстояние между множествами. Введем еще одно понятие, которое нам понадобится при доказательстве теоремы существования двойного интеграла.

Пусть A и B — два произвольных множества на плоскости. Назовем *расстоянием между множествами* A и B число

$$\rho(A, B) = \inf \rho(a, b), \tag{1.2}$$

где точная нижняя грань берется по всем парам $a \in A$, $b \in B$. Ясно, что если A и B имеют хотя бы одну общую точку, то $\rho(A, B) = 0$. Обратное, вообще говоря, не верно; например, расстояние между гиперболой $y = \frac{1}{x}$ и осью x равно нулю, хотя эти две линии не имеют общих точек. Справедлива, однако, следующая теорема, которая нам понадобится в § 2.

Теорема 1.1 (отделимость замкнутых множеств). *Если P и Q — ограниченные замкнутые множества без общих точек, то* $\rho(P, Q) > 0$.

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть $\rho(P, Q) = 0$. Тогда, по определению расстояния между множествами, для каждого $n = 1, 2, \ldots$ найдутся такие точки $p_n \in P$ и $q_n \in Q$, что

$$\rho(p_n, q_n) < \frac{1}{n}. \tag{1.3}$$

Так как $\{p_n\}$ — ограниченная бесконечная последовательность, то по теореме Больцано — Вейерштрасса (см. вып. 1, гл. 14, § 2) из нее можно выбрать подпоследовательность

$$p_{n_1}, p_{n_2}, \ldots, p_{n_k}, \ldots,$$

сходящуюся к некоторой точке p_0. Но тогда соответствующие точки

$$q_{n_1}, q_{n_2}, \ldots, q_{n_k}, \ldots$$

из последовательности $\{q_n\}$ образуют подпоследовательность, сходящуюся, в силу (1.3), к той же самой точке p_0.

Точка p_0 обязательно принадлежит множеству P. В самом деле, здесь возможны два случая. Либо подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$ содержит бесконечно много различных точек, тогда p_0 будет предельной для P и, в силу замкнутости P, $p_0 \in P$; либо же подпоследовательность $\{p_{n_k}\}$ стабилизируется, т. е. все ее точки, начиная с некоторого места, совпадают. Тогда, очевидно, они совпадают с p_0 и $p_0 \in P$. По тем же причинам $p_0 \in Q$. Но тогда P и Q имеют общую точку, что противоречит условию теоремы.

Упражнение. Убедиться, что теорема верна, когда из двух замкнутых множеств P и Q ограничено хотя бы одно.

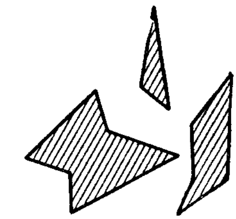

Рис. 1.4.

3. Площадь плоской фигуры. Из элементарной геометрии известно понятие площади многоугольной фигуры. (Под многоугольной фигурой мы понимаем множество, составленное из конечного числа ограниченных многоугольников (рис. 1.4.) *Площадь многоугольной фигуры* — это число, обязательно неотрицательное*), обладающее следующими свойствами:

1 (монотонность). *Если P и Q — две многоугольные фигуры и P целиком лежит внутри Q, то*

$$\text{пл}\, P \leqslant \text{пл}\, Q.$$

2 (аддитивность). *Если P_1 и P_2 — две многоугольные фигуры без общих внутренних точек и $P_1 + P_2$ означает объединение этих фигур, то*

$$\text{пл}\,(P_1 + P_2) = \text{пл}\, P_1 + \text{пл}\, P_2\ ^{**}).$$

3 (инвариантность.) *Если многоугольные фигуры P_1 и P_2 конгруэнтны между собой, то*

$$\text{пл}\,(P_1) = \text{пл}\,(P_2).$$

Распространим теперь понятие площади, сохранив все три свойства, с многоугольных фигур на некоторый более широкий класс фигур. Эта задача решается следующим способом.

---

*) Нулем оно будет, разумеется, лишь тогда, когда многоугольная фигура вырождается в конечное число точек или отрезков.

**) Легко убедиться в том, что требования 1 и 2 не независимы: монотонность площади вытекает из ее неотрицательности и условия аддитивности. Действительно, если многоугольная фигура P лежит внутри многоугольной фигуры Q, то Q можно представить как объединение P и многоугольной фигуры, которую естественно назвать разностью между Q и P и обозначить $Q - P$. Тогда (по аддитивности) $\text{пл}\, Q = \text{пл}\, P + \text{пл}\,(Q - P)$, но так как $\text{пл}\,(Q - P) \geqslant 0$, то $\text{пл}\, Q \geqslant \text{пл}\, P$.

Пусть F — некоторая плоская фигура*). Будем рассматривать всевозможные многоугольные фигуры P, целиком лежащие внутри F, и многоугольные фигуры Q, целиком содержащие F. Фигуры P будем называть вложенными, а фигуры Q — объемлющими. Площади вложенных фигур ограничены в совокупности сверху (например, площадью любой объемлющей фигуры), а площади объемлющих фигур ограничены снизу (например, нулем). Поэтому существуют точная верхняя грань**)

$$S_* = S_*(F) = \sup_{P \subset F} (\text{пл}\, P)$$

площадей всех многоугольных фигур, вложенных в фигуру F, и точная нижняя грань

$$S^* = S^*(F) = \inf_{Q \supset F} (\text{пл}\, Q)$$

площадей всех многоугольных фигур, объемлющих F.

Величина S_* называется *внутренней площадью* фигуры F, а S^* — ее *внешней площадью*. Из того, что площадь любой вложенной фигуры не больше, чем площадь любой объемлющей, следует:

$$S_* \leqslant S^*.$$

Если $S_* = S^*$, то их общее значение S называется просто *площадью фигуры* F. Сама фигура F при этом называется *имеющей площадь* или *квадрируемой*

Итак, мы распространили понятие площади с многоугольников на некоторый, более широкий класс фигур***). Сохранение основных свойств площади (аддитивность, монотонность и инвариантность) будет доказано в п. 4.

Установим следующее, полезное для дальнейшего условие квадрируемости фигуры.

Теорема 1.2. *Фигура F квадрируема в том и только том случае, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся две такие многоугольные фигуры $P \subset F$ и $Q \supset F$, что*

$$\text{пл}\, Q - \text{пл}\, P < \varepsilon. \tag{1.4}$$

Доказательство. Действительно, если такие фигуры существуют, то из

$$\text{пл}\, P \leqslant S_* \leqslant S^* \leqslant \text{пл}\, Q$$

*) То есть некоторое *ограниченное* множество точек на плоскости.

**) Если в фигуру F нельзя вписать ни одного многоугольника, то мы полагаем по определению, что $S_* = 0$.

***) Ясно, что всякая многоугольная фигура представляет собой квадрируемую (в указанном выше смысле) фигуру и для нее новое определение площади (с помощью S_* и S^*) дает исходную величину этой площади.

получаем, что

$$0 \leqslant S^* - S_* < \varepsilon,$$

а так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то $S^* = S_*$.

Обратно, если $S^* = S_*$, то, по определению точных граней, для заданного $\varepsilon > 0$ найдутся вложенная фигура P и объемлющая фигура Q такие, что

$$S_* - \frac{\varepsilon}{2} < \text{пл}\, P \leqslant S_*, \quad S^* \leqslant \text{пл}\, Q < S^* + \frac{\varepsilon}{2},$$

откуда

$$\text{пл}\, Q - \text{пл}\, P < \varepsilon.$$

Совокупность точек, принадлежащих Q, но не принадлежащих P, представляет собой многоугольную фигуру площади $\text{пл}\, Q - \text{пл}\, P$, содержащую границу фигуры F. Поэтому условие теоремы 1.2 означает, что фигура F квадрируема в том и только том случае, если ее граница может быть погружена в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади (рис. 1.5).

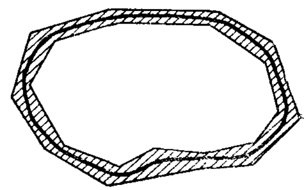

Рис. 1.5.

С помощью этой теоремы легко установить квадрируемость ряда фигур, отличных от многоугольных, например квадрируемость круга. В качестве P и Q для круга можно взять правильный вписанный и правильный описанный многоугольники с достаточно большим числом сторон.

Собственно говоря, тот вывод формулы площади круга, который обычно приводится в школьном курсе геометрии, основан на тех же самых рассуждениях, которые здесь излагаются в общем виде.

Введем следующую терминологию. Будем говорить, что некоторое множество, в частности кривая, имеет *площадь нуль*, если его можно заключить в многоугольную фигуру сколь угодно малой площади. Мы можем теперь сформулировать теорему 1.2 иначе.

Теорема 1.2′. *Для того чтобы фигура F была квадрируемой, необходимо и достаточно, чтобы ее граница имела площадь нуль.*

Опираясь на эту теорему, мы опишем сейчас некоторый класс заведомо квадрируемых фигур, достаточно широкий для того, чтобы ограничиться им во всех дальнейших рассмотрениях.

*Лемма. Всякая спрямляемая *) кривая имеет площадь нуль.*

*) *Спрямляемой* называется кривая, имеющая конечную длину. Как известно (см. вып. 1, гл. 11, § 1), если кривая задана уравнениями

$$x = \varphi(t), \quad y = \psi(t), \quad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции, имеющие непрерывные (или кусочно-непрерывные) производные, то она спрямляема.

Доказательство. Пусть L — спрямляемая кривая и l — ее длина. Разобьем эту кривую с помощью $n+1$ точек на части, длина каждой из которых меньше чем $\frac{l}{n}$ (это, разумеется, всегда возможно), и примем каждую из этих точек за центр квадрата со стороной $\frac{2l}{n}$ (рис. 1.6). Сумма этих квадратов представляет собой многоугольную фугуру, объемлющую кривую L, а площадь этой многоугольной фигуры не превосходит суммы площадей составляющих ее квадратов, т. е. $\frac{4l^2}{n^2}(n+1)$. Так как l фиксировано, а n можно взять произвольно большим, то кривую L действительно можно погрузить внутрь фигуры сколь угодно малой площади. Лемма доказана.

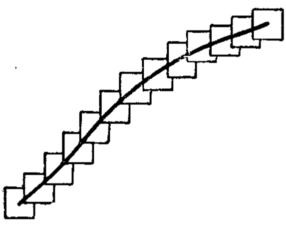

Рис. 1.6.

Из этой леммы и теоремы 1.2′ получаем:

Всякая плоская фигура (т. е. ограниченное плоское множество), граница которой состоит из одной или нескольких спрямляемых кривых, квадрируема.

Именно этот класс фигур мы и будем, как правило, рассматривать в дальнейшем.

Замечание. Укажем еще один класс плоских квадрируемых фигур. Всякая кривая, определяемая уравнением

$$y = f(x), \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

где $f(x)$ — непрерывная функция, или уравнением $x = g(y)$, $c \leqslant y \leqslant d$, где $g(y)$ тоже непрерывна, имеет площадь нуль. (Доказательство этого было дано в гл. 11 вып. 1.) Отсюда, в силу теоремы 1.2′, следует, что всякая фигура, граница которой представима в виде конечного числа непрерывных кривых, задаваемых уравнениями вида $y = f(x)$ или $x = g(y)$, квадрируема.

4. Основные свойства площади. Покажем теперь, что введенное нами определение площади плоской фигуры действительно обладает свойствами монотонности, аддитивности и инвариантности.

Монотонность почти непосредственно вытекает из определения площади, и ее проверка может быть предоставлена читателю. Установим аддитивность, т. е. докажем следующее предложение:

1) *Пусть F_1 и F_2 — две квадрируемые фигуры без общих внутренних точек и F — их объединение* (рис. 1.7); *тогда F тоже квадрируема и*

$$\text{пл}\, F = \text{пл}\, F_1 + \text{пл}\, F_2. \tag{1.5}$$

Квадрируемость фигуры F следует из теоремы 1.2′ и того, что ее граница составлена из множеств площади нуль, ограничивающих фигуры F_1 и F_2 (она является частью объединения границ фигур F_1 и F_2) *). Остается доказать равенство (1.5). Для этого рассмотрим многоугольные фигуры P_1 и P_2, вложенные в F_1 и F_2 соответственно, и многоугольные фигуры Q_1 и Q_2, объемлющие соответственно F_1 и F_2. Фигуры P_1 и P_2 не пересекаются, поэтому площадь многоугольной фигуры, составленной из P_1 и P_2, равна пл P_1 + пл P_2. Фигуры Q_1 и Q_2 (возможно, пересекающиеся) составляют в сумме фигуру Q, площадь которой не превосходит пл Q_1 + пл Q_2. Таким образом, имеем

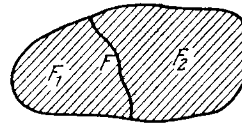

Рис. 1.7.

$$\text{пл}\,P = \text{пл}\,P_1 + \text{пл}\,P_2 \leqslant \text{пл}\,F \leqslant \text{пл}\,Q \leqslant \text{пл}\,Q_1 + \text{пл}\,Q_2$$

и

$$\text{пл}\,P_1 + \text{пл}\,P_2 \leqslant \text{пл}\,F_1 + \text{пл}\,F_2 \leqslant \text{пл}\,Q_1 + \text{пл}\,Q_2.$$

Так как разности пл Q_1 — пл P_1 и пл Q_2 — пл P_2 могут быть сделаны сколь угодно малыми, то отсюда следует равенство (1.5). Аддитивность доказана.

Наконец, свойство инвариантности площади непосредственно вытекает из инвариантности площади для многоугольных фигур и самого способа определения площади квадрируемых фигур через площади многоугольников. Укажем еще одно свойство квадрируемых фигур.

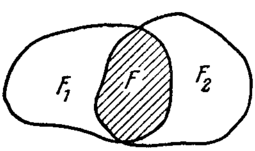

Рис. 1.8.

2) *Общая часть двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура.*

Действительно, если F_1 и F_2 — какие-либо две фигуры и F — их общая часть (рис. 1.8), то каждая точка, граничная для F, является граничной либо для F_1, либо для F_2. Поэтому наше утверждение следует из теоремы 1.2′ и того факта, что объединение множеств площади нуль само имеет площадь нуль.

5. О понятии меры множества. Введенное в этом параграфе понятие площади называют понятием площади по Жордану **), или *мерой Жордана.* Это понятие имеет, однако, некоторые недостатки. Действительно, выше было показано, что объединение двух квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура. Отсюда, конечно, немедленно следует, что и объединение любого конечного числа квадрируемых фигур есть квадрируемая фигура. Однако если мы рассмотрим некоторую последовательность квадрируемых фигур

$$F_1,\ F_2,\ \ldots,\ F_n,\ \ldots,$$

*) Очевидно, что всякая часть множества площади нуль сама является множеством площади нуль.

**) Камилл Жордан (1838—1922) — французский математик.

то их объединение может быть уже и не квадрируемой фигурой. Вот простой пример. Рассмотрим на плоскости квадрат

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

и отметим в нем точки с рациональными координатами. Нетрудно показать, что все эти точки образуют счетное множество, т. е. что их можно расположить в виде последовательности

$$p_1 = (x_1, y_1), \; p_2 = (x_2, y_2), \; \ldots, \; p_n = (x_n, y_n), \; \ldots$$

Возьмем теперь некоторое число $\varepsilon > 0$ и построим круг радиуса $r_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке p_1. Далее, возьмем первую из точек $p_2, p_3, \ldots$, не попавшую в этот круг, и построим с центром в этой точке круг радиуса $r_2 < \frac{\varepsilon}{2^2}$, не пересекающийся с первым кругом. После этого возьмем первую из оставшихся точек, не попавшую в построенные круги, и примем ее за центр круга радиуса $r_3 < \frac{\varepsilon}{2^3}$, не пересекающегося с двумя уже построенными кругами. Будем продолжать такое построение до бесконечности. Мы получили последовательность помещенных внутри квадрата кругов (без общих точек), расположенных в этом квадрате «всюду плотно*)». Нетрудно показать (сделайте это), что *объединение этих кругов представляет собой фигуру F, не квадрируемую в смысле Жордана.* Вместе с тем этой фигуре естественно приписать площадь, равную сумме площадей составляющих ее кругов. Эта сумма, очевидно, равна

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi r_i^2 < \sum_{i=1}^{\infty} \pi \frac{\varepsilon^2}{2^{2i}} = \frac{1}{3} \pi \varepsilon^2.$$

Подобные затруднения отпадают, если вместо понятия меры Жордана пользоваться более гибким и совершенным понятием *меры Лебега* **), которое мы, к сожалению, не можем здесь излагать.

§ 2. Определение и основные свойства двойного интеграла

1. Определение двойного интеграла. Перейдем к основной теме этой главы — понятию двойного интеграла. Пусть G — некоторая квадрируемая фигура, и пусть в G определена ограниченная функция $f(x, y)$. Разобъем G на конечное число непересекающихся квадрируемых частей G_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \tag{1.6}$$

где ΔS_i — площадь G_i, а (ξ_i, η_i) — произвольная точка, принадлежащая G_i. Суммы вида (1.6) будем называть *интегральными суммами*

*) Это означает, что объединение этих кругов представляет собой множество, замыкание которого есть весь квадрат.

**) Анри Лебег (1875—1941) — французский математик, один из создателей современной теории функций.