то их объединение может быть уже и не квадрируемой фигурой. Вот простой пример. Рассмотрим на плоскости квадрат

$$0 \leqslant x \leqslant 1, \quad 0 \leqslant y \leqslant 1,$$

и отметим в нем точки с рациональными координатами. Нетрудно показать, что все эти точки образуют счетное множество, т. е. что их можно расположить в виде последовательности

$$p_1 = (x_1, y_1), \; p_2 = (x_2, y_2), \; \ldots, \; p_n = (x_n, y_n), \; \ldots$$

Возьмем теперь некоторое число $\varepsilon > 0$ и построим круг радиуса $r_1 < \frac{\varepsilon}{2}$ с центром в точке p_1. Далее, возьмем первую из точек $p_2, p_3, \ldots$, не попавшую в этот круг, и построим с центром в этой точке круг радиуса $r_2 < \frac{\varepsilon}{2^2}$, не пересекающийся с первым кругом. После этого возьмем первую из оставшихся точек, не попавшую в построенные круги, и примем ее за центр круга радиуса $r_3 < \frac{\varepsilon}{2^3}$, не пересекающегося с двумя уже построенными кругами. Будем продолжать такое построение до бесконечности. Мы получили последовательность помещенных внутри квадрата кругов (без общих точек), расположенных в этом квадрате «всюду плотно*)». Нетрудно показать (сделайте это), что *объединение этих кругов представляет собой фигуру F, не квадрируемую в смысле Жордана*. Вместе с тем этой фигуре естественно приписать площадь, равную сумме площадей составляющих ее кругов. Эта сумма, очевидно, равна

$$\sum_{i=1}^{\infty} \pi r_i^2 < \sum_{i=1}^{\infty} \pi \frac{\varepsilon^2}{2^{2i}} = \frac{1}{3} \pi \varepsilon^2.$$

Подобные затруднения отпадают, если вместо понятия меры Жордана пользоваться более гибким и совершенным понятием *меры Лебега* **), которое мы, к сожалению, не можем здесь излагать.

§ 2. Определение и основные свойства двойного интеграла

1. Определение двойного интеграла. Перейдем к основной теме этой главы — понятию двойного интеграла. Пусть G — некоторая квадрируемая фигура, и пусть в G определена ограниченная функция $f(x, y)$. Разобъем G на конечное число непересекающихся квадрируемых частей G_i и составим сумму

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i, \tag{1.6}$$

где ΔS_i — площадь G_i, а (ξ_i, η_i) — произвольная точка, принадлежащая G_i. Суммы вида (1.6) будем называть *интегральными суммами*

---

*) Это означает, что объединение этих кругов представляет собой множество, замыкание которого есть весь квадрат.

**) Анри Лебег (1875—1941) — французский математик, один из создателей современной теории функций.

(отвечающими функции $f(x, y)$ и фигуре G). Введем понятие предела интегральных сумм (1.6) следующим образом.

Определение 1. *Пусть D — наибольший из диаметров $d(G_i)$ фигур G_i. Мы скажем, что число J есть* ***предел интегральных сумм*** *(1.6) при $D \to 0$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что*

$$|\sigma - J| < \varepsilon \tag{1.7}$$

как только

$$D < \delta. \tag{1.8}$$

Иными словами, неравенство (1.7) должно выполняться для всех интегральных сумм σ, соответствующих разбиениям $G = G_1 + G_2 + \ldots + G_n$, которые удовлетворяют условию (1.8) независимо от вида разбиения фигуры G на части G_i и независимо от выбора точки (ξ_i, η_i) в каждом из элементов разбиения.

Определение 2. *Если предел*

$$\lim_{D \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$$

интегральных сумм (1.6) существует, то он называется ***двойным интегралом*** *от функции $f(x, y)$ по области G и обозначается символом $\iint\limits_G f(x, y)\,ds$ или $\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$.* Сама функция $f(x, y)$ при этом называется *интегрируемой* по фигуре G.

Иногда понятие двойного интеграла вводят несколько иначе. Фигуру G, взятую из того или иного класса фигур, разбивают прямыми, параллельными осям координат на прямоугольные ячейки (рис. 1.9). В каждой из ячеек G_i выбирают по точке (ξ_i, η_i) и составляют сумму $\sigma = \sum f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i$. Сумму берут, скажем, по всем ячейкам, лежащим внутри G, игнорируя ячейки, прилегающие к границе G (их суммарная площадь мала). Затем переходят к пределу, когда максимальный диаметр ячейки стремится к нулю. Неудобство этого определения состоит в том, что оно по форме привязано к определенной системе координат на плоскости, в то время как интуитивно ясно, что интеграл

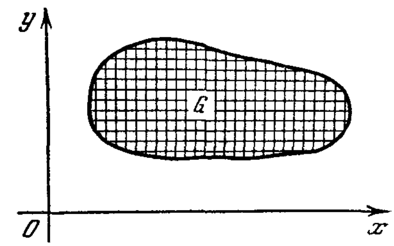

Рис. 1.9.

$\iint\limits_G f(x, y)\,ds$, т. е. объем цилиндрического тела, не должен зависеть от выбора системы декартовых координат на плоскости. Определение с прямоугольными ячейками потребовало бы специального доказательства этого факта. При нашем определении это получается автоматически. Изложенное выше определение обладает и другими преимуществами. Пусть, скажем, функция $f(x, y)$ принимает на G только два значения: a_1 и a_2 (рис. 1.10).

Если части G_1 и G_2, на которых $f(x, y)$ равна a_1 и a_2 соответственно, квадрируемы, то наше определение позволяет получить интеграл $\iint\limits_G f(x, y)\,ds$, по существу, без предельного перехода. Интуитивно очевидно, что

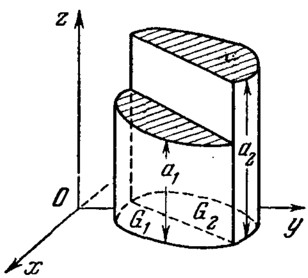

Рис. 1.10.

$$\iint\limits_G f(x, y)\,ds = \text{пл}\,G_1 \cdot a_1 + \text{пл}\,G_2 \cdot a_2$$

(доказать!). Определение с прямоугольными ячейками потребовало бы даже в этом очевидном случае кропотливого предельного перехода.

Вместе с тем следует подчеркнуть, что *оба указанных пути приводят к одному и тому же понятию двойного интеграла.*

2. Условия существования двойного интеграла. Верхние и нижние суммы. Выясним, какие условия нужно наложить на функцию $f(x, y)$, определенную на некоторой квадрируемой фигуре G, для того, чтобы можно было гарантировать существование двойного интеграла

$$\iint\limits_G f(x, y)\,ds.$$

Вводя определение двойного интеграла, мы предполагали, что соответствующая функция $f(x, y)$ ограничена *). Однако, как легко показать на примерах, не всякая ограниченная функция интегрируема **).

*) В гл. 10 вып. 1 применительно к функциям одной переменной на отрезке было доказано, что всякая интегрируемая функция ограничена. Однако проведенные там рассуждения мы не можем полностью перенести на случай двух переменных. Действительно, рассматривая различные разбиения квадрируемой фигуры G на квадрируемые части G_i, мы, вообще говоря, не сможем избежать случая, когда некоторые из этих элементов разбиения имеют площадь нуль. Но тогда из неограниченности функции не следует неограниченность ее интегральных сумм $\sum f(x_i, y_i)\,\Delta S_i$ при каждом разбиении (поскольку функция может оказаться неограниченной только на том элементе разбиения, который имеет площадь нуль). В случае одной переменной при разбиении промежутка интегрирования на непересекающиеся полусегменты такое положение не возникает. В случае двух (или нескольких) переменных мы могли бы исключить появление элементов нулевой площади, сузив как класс рассматриваемых фигур, так и класс рассматриваемых разбиений. Другой возможный путь (который мы здесь и выбрали) состоит в том, чтобы заранее исключить из рассмотрения неограниченные функции.

**) Примером ограниченной, но не интегрируемой функции двух переменных может служить функция, определенная на квадрате $0 \leqslant x \leqslant 1$, $0 \leqslant y \leqslant 1$ следующим образом: $f(x, y) = 1$, если x и y рациональны, и $f(x, y) = 0$ в противном случае. Доказательство неинтегрируемости такой функции предоставляется читателю.

Для нахождения условий интегрируемости удобно, как и в случае одной переменной, воспользоваться так называемыми **нижними и верхними суммами Дарбу** *).

Пусть $f(x, y)$ — ограниченная функция, определенная на квадрируемой фигуре G, и $\{G_i\}$ — некоторое разбиение этой фигуры. Обозначим M_i и m_i соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани значений $f(x, y)$ на элементе G_i. Суммы

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i \quad \text{и} \quad \omega = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i$$

назовем соответственно *верхней и нижней суммами Дарбу* функции $f(x, y)$ (отвечающими данному разбиению $\{G_i\}$ фигуры G). Очевидно, что $\Omega \geqslant \omega$ для любого разбиения $\{G_i\}$.

Укажем основные свойства верхних и нижних сумм.

1) *Для данного разбиения $\{G_i\}$ фигуры G верхняя и нижняя суммы представляют собой соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани интегральных сумм*

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i,$$

отвечающих данному разбиению $\{G_i\}$ (и всевозможным выборам точек (ξ_i, η_i)). В частности, всегда

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i = \Omega.$$

Неравенство

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \leqslant \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i = \Omega$$

очевидно при любом выборе точки (ξ_i, η_i) на G_i.

С другой стороны, по определению точной верхней грани, для каждого $\varepsilon > 0$ можно в каждом из элементов данного разбиения $\{G_i\}$ выбрать точку (ξ_i, η_i) так, что $M_i - f(\xi_i, \eta_i) < \frac{\varepsilon}{S}$ (S — площадь области G). Но тогда

$$\Omega - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i = \sum_{i=1}^{n} (M_i - f(\xi_i, \eta_i)) \Delta S_i < \frac{\varepsilon}{S} \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \varepsilon.$$

Для нижней суммы рассуждения аналогичны.

---

*) Гастон Дарбу — французский математик (1842—1917).

Назовем разбиение $\{G'_j\}$ *измельчением* разбиения $\{G_i\}$, если каждый элемент G_i второго разбиения либо служит элементом первого разбиения, либо представляет собой объединение нескольких элементов этого первого разбиения. Справедливо следующее утверждение:

2) *Если Ω и ω — верхняя и нижняя суммы, отвечающие разбиению $\{G_i\}$, а Ω' и ω' — верхняя и нижняя суммы, отвечающие некоторому его измельчению $\{G'_j\}$, то*

$$\omega \leqslant \omega' \leqslant \Omega' \leqslant \Omega,$$

т. е. при измельчении разбиения верхняя интегральная сумма не увеличивается, а нижняя не уменьшается.

Действительно, пусть $\{G_i\}$ — некоторое разбиение фигуры G и $\{G'_j\}$ — его измельчение. Это означает, что каждый элемент G_i разбиения $\{G_i\}$ представляет собой сумму элементов $G'_{i\alpha}$, $\alpha = 1, 2, \ldots, k_i$, второго разбиения. При этом

$$\Delta S_i = \sum_{\alpha=1}^{k_i} \Delta S'_{i\alpha}, \tag{1.9}$$

$$M_i \geqslant M_{i\alpha}, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, k_i, \tag{1.10}$$

и каждый элемент G'_j входит в состав одного из G_i. Отсюда следует

$$\Omega = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta S_i \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sum_{\alpha=1}^{k_i} M_{i\alpha} \Delta S'_{i\alpha} = \Omega'.$$

Аналогично доказывается неравенство $\omega \leqslant \omega'$.

3) *Пусть $\{G'_i\}$ и $\{G''_j\}$ — два произвольных разбиения фигуры G, а Ω', ω' и Ω'', ω'' — отвечающие им верхние и нижние суммы. Тогда*

$$\Omega' \geqslant \omega'', \quad \Omega'' \geqslant \omega',$$

т. е. любая верхняя сумма (отвечающая данной функции $f(x, y)$) *не меньше, чем любая нижняя сумма* (отвечающая той же функции). Для доказательства этого утверждения заметим прежде всего, что для любых двух разбиений $\{G'_i\}$ и $\{G''_j\}$ фигуры G найдется их *«общее продолжение»*, т. е. такое разбиение, которое служит измельчением каждого из двух данных. В качестве элементов этого «общего продолжения» можно взять, например, пересечения произвольного элемента G'_i одного разбиения с произвольным элементом G''_j второго разбиения (нужно брать, конечно, только такие G'_i и G''_j, которые имеют общие точки).

Рассмотрим теперь верхние и нижние суммы, отвечающие разбиениям $\{G'_i\}$, $\{G''_j\}$ и их общему продолжению $\{\hat{G}_k\}$. Обозначим эти суммы соответственно Ω', ω'; Ω'', ω''; $\widehat{\Omega}$, $\widehat{\omega}$. Тогда по свойству 2)

$$\Omega' \geqslant \widehat{\Omega}, \quad \Omega'' \geqslant \widehat{\Omega}$$

и

$$\omega' \leqslant \widehat{\omega}, \quad \omega'' \leqslant \widehat{\omega}.$$

Кроме того, очевидно, имеет место неравенство

$$\widehat{\omega} \leqslant \widehat{\Omega}.$$

Таким образом,

$$\Omega' \geqslant \widehat{\Omega} \geqslant \widehat{\omega} \geqslant \omega''$$

и аналогично

$$\Omega'' \geqslant \widehat{\Omega} \geqslant \widehat{\omega} \geqslant \omega'.$$

Утверждение доказано.

Совокупность всех верхних сумм, отвечающих данной функции $f(x, y)$, ограничена снизу (например, любой нижней суммой), а совокупность всех нижних сумм ограничена сверху (например, любой верхней суммой). Обозначим $\overline{J}$ точную нижнюю грань верхних сумм, а $\underline{J}$ — точную верхнюю грань нижних сумм. Числа $\overline{J}$ и $\underline{J}$ называются *верхним* и *нижним интегралами функции* $f(x, y)$ (по области G). Имеет место неравенство

$$\underline{J} \leqslant \overline{J}.$$

Действительно, если бы имело место обратное неравенство, то нашлось бы число ε такое, что

$$\underline{J} - \overline{J} > \varepsilon > 0. \tag{1.11}$$

Далее, по определению точных граней, нашлись бы верхняя сумма Ω_1 и нижняя сумма ω_2 такие, что

$$\Omega_1 - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{и} \quad \underline{J} - \omega_2 < \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$\Omega_1 - \omega_2 + (\underline{J} - \overline{J}) < \varepsilon,$$

откуда, в силу (1.11),

$$\Omega_1 - \omega_2 < 0,$$

что противоречит свойству 3).

Свойства 1) — 3) верхних и нижних сумм позволяют установить следующее необходимое и достаточное условие интегрируемости функции $f(x, y)$, вполне аналогичное необходимому и достаточному условию существования определенного интеграла (см. вып. 1, гл. 10, теорема 10.1).

Теорема 1.3. *Ограниченная на квадрируемой фигуре G функция $f(x, y)$ интегрируема на G в том и только том случае,* *если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение фигуры G, что отвечающие этому разбиению суммы Дарбу удовлетворяют условию $\Omega - \omega < \varepsilon$.*

Доказательство этой теоремы опирается на следующую лемму Дарбу.

Лемма Дарбу. *Верхний и нижний интегралы $\overline{J}$ и $\underline{J}$ служат соответственно пределами верхних и нижних интегральных сумм Дарбу при $D \to 0$.* (D — максимум диаметров $d(G_i)$ элементов разбиения $\{G_i\}$ фигуры G.)

Для удобства введем понятие *границы разбиения.* Если дано разбиение $\{G_i\}$ фигуры G на квадрируемые элементы G_i, то под границей L разбиения $\{G_i\}$ мы будем понимать объединение границ L_i всех элементов G_i:

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_n.$$

Для всякого разбиения фигуры G на квадрируемые G_i границы L_i имеют площадь нуль, поэтому граница L разбиения $\{G_i\}$ также имеет площадь нуль.

Граница L как объединение конечного числа замкнутых множеств L_i является замкнутым множеством. (Это общее утверждение о замкнутых множествах читателю предлагается доказать!)

Перейдем теперь к доказательству леммы Дарбу.

Доказательство леммы Дарбу. По определению верхнего интеграла $\overline{J}$ для всякого $\varepsilon > 0$ найдется такое разбиение $\{G_i^*\}$ фигуры G, что отвечающая ему верхняя сумма Ω^* удовлетворяет условию

$$0 \leqslant \Omega^* - \overline{J} < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заключим границу L^* этого разбиения строго внутрь некоторой многоугольной фигуры Q, площадь которой меньше чем $\frac{\varepsilon}{2M}$, где $M = \sup\limits_{(x, y) \in G} |f(x, y)|$.

Граница L^* и граница многоугольной области Q — это два ограниченных замкнутых множества без общих точек (рис. 1.11). Следовательно, по теореме 1.1 расстояние между ними есть некоторая положительная величина α.

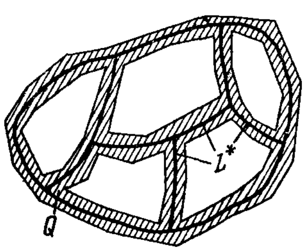

Рис. 1.11.

Рассмотрим теперь произвольное разбиение $\{G_k\}$ фигуры G, для которого $D < \alpha$. Элементы G_k этого разбиения обладают, очевидно, следующим свойством: если G_k имеет хотя бы одну общую точку с L^*, то G_k целиком лежит внутри области Q. Такие элементы G_k мы назовем граничными, а все остальные — внутренними. Покажем теперь, что всякому разбиению $\{G_k\}$, для которого $D < \alpha$, отвечает верхняя сумма Ω, отличающаяся от $\overline{J}$ меньше чем на ε. Разобьем сумму Ω на два слагаемых:

$$\Omega = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta S_k = \sum{}' M_k' \Delta S_k' + \sum{}'' M_k'' \Delta S_k'',$$

где первая сумма Σ' берется по всем внутренним, а вторая Σ'' по всем граничным элементам разбиения $\{G_k\}$. Оценим каждую из этих сумм в отдельности. Каждый внутренний элемент разбиения $\{G_k\}$ целиком лежит внутри некоторого элемента разбиения $\{G_i^*\}$. При этом соответствующая точная верхняя грань M_k' не превосходит, очевидно, точной верхней грани значений функции $f(x, y)$ на этом элементе разбиения $\{G_i^*\}$. Отсюда следует, что

$$\sum{}' M_k' \Delta S_k' \leqslant \Omega^*.$$

Далее, очевидны неравенства

$$|M_k''| \leqslant M = \sup_{(x, y) \in G} |f(x, y)| \quad \text{при всех } k$$

и

$$\sum{}'' \Delta S_k'' < \text{пл } Q < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Следовательно,

$$\left|\sum{}'' M_k \Delta S_k''\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, значит,

$$\Omega = \sum{}' M_k' \Delta S_k' + \sum{}'' M_k'' \Delta S_k'' \leqslant \Omega^* + \frac{\varepsilon}{2} < \bar{J} + \varepsilon,$$

что и требовалось доказать. Для нижних сумм доказательство аналогично.

Перейдем теперь к доказательству теоремы 1.3.

Необходимость. Пусть $f(x, y)$ интегрируема и пусть задано $\varepsilon > 0$. Обозначим интеграл от $f(x, y)$ символом J. По определению предела интегральных сумм, для данного ε найдется такое $\delta > 0$, что для всякого разбиения $\{G_i\}$, для которого $D < \delta$, выполняется, независимо от выбора точек (ξ_i, η_i), условие

$$\left| J - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i) \Delta S_i \right| < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.12}$$

Далее, верхняя и нижняя суммы, отвечающие разбиению $\{G_i\}$, представляют собой соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани интегральных сумм, отвечающих этому разбиению. Поэтому, зафиксировав разбиение, можно выбрать точки (ξ_i', η_i') и (ξ_i'', η_i'') в элементах G_i этого разбиения так, чтобы выполнялись неравенства

$$\Omega - \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i', \eta_i') \Delta S_i < \frac{\varepsilon}{4}; \quad \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i'', \eta_i'') \Delta S_i - \omega < \frac{\varepsilon}{4}. \tag{1.13}$$

Так как каждая из этих двух интегральных сумм удовлетворяет неравенству (1.12), то из (1.13) следует:

$$\Omega - \omega < \varepsilon.$$

Достаточность. Если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое разбиение, что

$$\Omega - \omega < \varepsilon,$$

то, очевидно,

$$\bar{J} = \underline{J}.$$

Обозначим общее значение этих величин через J и покажем, что J представляет собой предел интегральных сумм, т. е. двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по G. В силу леммы Дарбу, J есть общий предел верхних и нижних сумм при $D \to 0$. Но так как любая интегральная сумма, отвечающая некоторому разбиению, заключеиа между соответствующими суммами Ω и ω, то J есть предел интегральиых сумм при $D \to 0$. Теорема доказана.

3. Важнейшие классы интегрируемых функций. С помощью теоремы 1.3 мы установим сейчас интегрируемость некоторых важных классов функций, в первую очередь непрерывных функций. Ниже мы будем считать, что каждая из рассматриваемых функций задана в некоторой замкнутой ограниченной квадрируемой области.

Теорема 1.4. *Всякая функция $f(x, y)$, непрерывная в замкнутой ограниченной*) области G, интегрируема на G.*

Доказательство. Поскольку $f(x, y)$ непрерывна на замкнутом ограниченном множестве, она ограничена и равномерно непрерывна на этом множестве**). В силу равномерной непрерывности функции $f(x, y)$, для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что как только фигура G разбита на части G_i, диаметр каждой из которых меньше δ, колебание функции $f(x, y)$ в каждой из этих частей, т. е. разность $M_i - m_i$, будет меньше чем ε. Но тогда

$$\Omega - \omega = \sum_{i=i}^{n} M_i \Delta S_i - \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta S_i < \varepsilon \sum_{i=1}^{n} \Delta S_i = \varepsilon S,$$

следовательно, функция $f(x, y)$ интегрируема.

Требование непрерывности подынтегральной функции слишком стеснительно. Поэтому для приложений важна следующая теорема, гарантирующая существование двойного интеграла для некоторого класса разрывных функций.

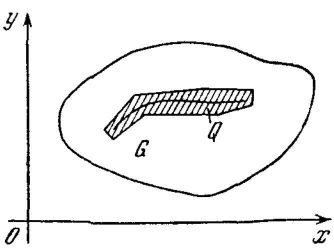

Рис. 1.12.

Теорема 1.4′. *Если функция $f(x, y)$ ограничена в замкнутой ограниченной области G и непрерывна на G всюду, кроме некоторого множества площади нуль, то $f(x, y)$ интегрируема в G.*

Доказательство. Возьмем произвольное $\varepsilon > 0$. По условию $f(x, y)$ ограничена, т. е. существует такое K, что $|f(x, y)| < K$. Заключим множество, на котором функция $f(x, y)$ может быть разрывной, внутрь многоугольной фигуры Q, площадь которой меньше чем $\frac{\varepsilon}{4K}$ (рис. 1.12). Часть области G, не входящую в Q, обозначим $\tilde{G}$. Граничные точки много-

---

*) И, конечио, квадрируемой; в дальнейшем мы всегда будем предполагать выполнеиным условие квадрируемости, ие оговаривая этого особо.

**) См. вып. 1, гл. 14, теоремы 14.6 и 14.8.

угольной фигуры Q, принадлежащие G, мы причисляем к $\tilde{G}$, поэтому $\tilde{G}$ замкнута. На замкнутом множестве $\tilde{G}$ функция $f(x, y)$ непрерывна, а следовательно, и равномерно непрерывна. Выберем $\delta > 0$ так, чтобы в любой части фигуры $\tilde{G}$, имеющей диаметр меньше чем δ, колебание функции $f(x, y)$ было бы меньше чем $\frac{\varepsilon}{2S}$ (где S — площадь G). Рассмотрим теперь такое разбиение $\{G_i\}$ области G: первым его элементом G_1 служит Q, а все остальные имеют диаметр, меньший чем δ. Оценим разность $\Omega - \omega$ для этого разбиения. Имеем

$$\Omega - \omega = M_1 \Delta S_1 - m_1 \Delta S_1 + \sum_{i=2}^{n} (M_i - m_i) \Delta S_i <$$

$$< (M_1 - m_1) \frac{\varepsilon}{4K} + \sum_{i=2}^{n} \frac{\varepsilon}{2S} \Delta S_i.$$

Но $M_1 - m_1 \leqslant 2K$, а $\sum\limits_{i=2}^{n} \Delta S_i < S$, следовательно,

$$\Omega - \omega < 2K \frac{\varepsilon}{4K} + \frac{\varepsilon}{2S} S = \varepsilon.$$

Так как $\varepsilon > 0$ произвольно, то, в силу теоремы 1.3, функция $f(x, y)$ интегрируема.

4. Свойства двойного интеграла. Основные свойства двойного интеграла вполне аналогичны соответствующим свойствам определенного интеграла для функции одной переменной, поэтому мы только перечислим эти свойства, не останавливаясь на доказательствах.

1. *Если функции $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в области G, то их сумма (разность) тоже интегрируема в G и*

$$\iint_G [f_1(x, y) \pm f_2(x, y)]\, ds = \iint_G f_1(x, y)\, ds \pm \iint_G f_2(x, y)\, ds.$$

2. *Если k — постоянное число и функция $f(x, y)$ интегрируема в G, то функция $kf(x, y)$ тоже интегрируема в G и*

$$\iint_G kf(x, y)\, ds = k \iint_G f(x, y)\, ds.$$

Совокупность этих двух свойств называется линейностью интеграла.

3. *Если область G представляет собой объединение двух областей G_1 и G_2, в каждой из которых функция $f(x, y)$ интегрируема, то в G эта функция также интегрируема. Если,*

кроме того, G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, то

$$\iint_G f(x, y)\,ds = \iint_{G_1} f(x, y)\,ds + \iint_{G_2} f(x, y)\,ds.$$

Это свойство называется аддитивностью интеграла.

4. *Если $f_1(x, y)$ и $f_2(x, y)$ интегрируемы в G и $f_1(x, y) \leqslant f_2(x, y)$, то*

$$\iint_G f_1(x, y)\,ds \leqslant \iint_G f_2(x, y)\,ds.$$

Это свойство называется монотонностью интеграла; из него вытекают свойства 5 и 6.

5 (оценка интеграла по модулю). *Если $f(x, y)$ интегрируема в G, то функция $|f(x, y)|$ также интегрируема в G и*

$$\left|\iint_G f(x, y)\,ds\right| \leqslant \iint_G |f(x, y)|\,ds.$$

6 (теорема о среднем). *Если функция $f(x, y)$ интегрируема в G и удовлетворяет неравенствам*

$$m \leqslant f(x, y) \leqslant M,$$

то

$$mS \leqslant \iint_G f(x, y)\,ds \leqslant MS, \tag{1.14}$$

где S — площадь фигуры G.

Это утверждение непосредственно вытекает из свойства 4 и того очевидного факта, что

$$\iint_G c\,ds = cS, \qquad c = \text{const}.$$

Если функция $f(x, y)$ непрерывна, то теорема о среднем может быть сформулирована в таком виде:

6′. *В области G найдется такая точка (ξ, η), что*

$$\iint_G f(x, y)\,ds = f(\xi, \eta)\,S. \tag{1.15}$$

Действительно, примем за m и M соответственно точную нижнюю и точную верхнюю грани значений функции $f(x, y)$ в G. Тогда, согласно (1.14),

$$m \leqslant \frac{1}{S}\iint_G f(x, y)\,ds \leqslant M.$$

Но (см. вып. 1, гл. 14, § 3) функция, непрерывная в замкнутой области, принимает значения m, M. Предположим для простоты, что функция $f(x, y)$ принимает значения M и m в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2), лежащих внутри области G. (Рассуждение несколько усложняется, если какая-либо из этих точек, или обе они, попадают на границу области G.) Любые две точки области мы можем соединить ломаной, лежащей в области. Соединим ломаной точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), в которых функция равна соответственно M и m. Вдоль такой ломаной функция $f(x, y)$ непрерывна и, следовательно, вместе со значениями M и m принимает и все промежуточные. В частности, найдется точка, обозначим ее (ξ, η), в которой

$$f(\xi, \eta) = \frac{1}{S} \int\int_G f(x, y)\, ds,$$

тем самым формула (1.15) доказана.

§ 3. Аддитивные функции области. Производная по площади

1. Функции точки и функции области. Одно из самых основных понятий анализа — понятие функции. Мы встречались с функциями, зависящими от одной, двух или нескольких независимых переменных. Пользуясь геометрической терминологией, можно сказать, что эти функции представляют собой переменные величины, зависящие от точки на прямой (в случае одной переменной), от точки на плоскости (при двух переменных) или от точки в пространстве некоторого числа измерений. Однако в анализе и его физических применениях часто встречаются функции другого рода, в которых роль значений аргумента играют уже не отдельные точки, а множества — например плоские или пространственные фигуры; такие функции называются *функциями множества* или *функциями области* *).

Примером функции области может служить площадь $S(G)$ области G, определенная для всех квадрируемых плоских областей так, как это было описано в § 1. Рассмотрим еще один пример. Пусть по плоскости xy распределена некоторая масса. Тогда каждой области G, лежащей в этой плоскости, отвечает определенное число — масса $\mu(G)$, сосредоточенная на G. Здесь опять-таки мы имеем дело

*) Термин «область» употребляется здесь просто как синоним термина «множество», а не как термин, означающий открытое связное множество. Запас областей (т. е. запас множеств), на которых определена данная функция области (т. е. множества), различен в различных ситуациях. У нас таким запасом будет, как правило, совокупность всех квадрируемых фигур.