Но (см. вып. 1, гл. 14, § 3) функция, непрерывная в замкнутой области, принимает значения m, M. Предположим для простоты, что функция $f(x, y)$ принимает значения M и m в точках (x_1, y_1) и (x_2, y_2), лежащих внутри области G. (Рассуждение несколько усложняется, если какая-либо из этих точек, или обе они, попадают на границу области G.) Любые две точки области мы можем соединить ломаной, лежащей в области. Соединим ломаной точки (x_1, y_1) и (x_2, y_2), в которых функция равна соответственно M и m. Вдоль такой ломаной функция $f(x, y)$ непрерывна и, следовательно, вместе со значениями M и m принимает и все промежуточные. В частности, найдется точка, обозначим ее (ξ, η), в которой

$$f(\xi, \eta)=\frac{1}{S}\iint_G f(x, y)\,ds,$$

тем самым формула (1.15) доказана.

§ 3. Аддитивные функции области. Производная по площади

1. Функции точки и функции области. Одно из самых основных понятий анализа — понятие функции. Мы встречались с функциями, зависящими от одной, двух или нескольких независимых переменных. Пользуясь геометрической терминологией, можно сказать, что эти функции представляют собой переменные величины, зависящие от точки на прямой (в случае одной переменной), от точки на плоскости (при двух переменных) или от точки в пространстве некоторого числа измерений. Однако в анализе и его физических применениях часто встречаются функции другого рода, в которых роль значений аргумента играют уже не отдельные точки, а множества — например плоские или пространственные фигуры; такие функции называются *функциями множества* или *функциями области* *).

Примером функции области может служить площадь $S(G)$ области G, определенная для всех квадрируемых плоских областей так, как это было описано в § 1. Рассмотрим еще один пример. Пусть по плоскости xy распределена некоторая масса. Тогда каждой области G, лежащей в этой плоскости, отвечает определенное число — масса $\mu(G)$, сосредоточенная на G. Здесь опять-таки мы имеем дело

*) Термин «область» употребляется здесь просто как синоним термина «множество», а не как термин, означающий открытое связное множество. Запас областей (т. е. запас множеств), на которых определена данная функция области (т. е. множества), различен в различных ситуациях. У нас таким запасом будет, как правило, совокупность всех квадрируемых фигур.

с переменной величиной, зависящей от области, т. е. с некоторой функцией области.

Введем следующее важное определение.

Определение. *Функция области $F(G)$ называется аддитивной, если выполнены следующие условия:*

1) *если $F(G)$ определена для областей G_1 и G_2, то она определена и для их объединения G_1+G_2;*

2) *если G_1 и G_2 не имеют общих внутренних точек, то*

$$F(G_1+G_2)=F(G_1)+F(G_2)\ ^{*)}.$$

Обе указанные выше функции — площадь и масса — обладают этим свойством аддитивности. Можно привести и много других примеров аддитивных функций области: поверхностный заряд, количество световой энергии, падающей на освещенную поверхность, давление жидкости на дно сосуда и т. п.

Можно, конечно, указать примеры и не аддитивных функций области. Например, если каждой квадрируемой области поставить в соответствие квадрат ее площади, то мы получим функцию области, но не аддитивную.

С аддитивными функциями, в которых роль аргумента играет не плоская, а пространственная область, мы встретимся в следующей главе, посвященной тройным интегралам.

2. Двойной интеграл как аддитивная функция области. Рассмотрим двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,ds,$$

считая в нем подынтегральную функцию $f(x, y)$ фиксированной, а область интегрирования G переменной. Тогда этот интеграл будет представлять собой некоторую функцию $\Phi(G)$ области G. В силу свойства 2 двойных интегралов, сформулированного в предыдущем параграфе, эта функция области аддитивна. Запас областей, на которых она определена, составляют все квадрируемые фигуры, содержащиеся в квадрируемой фигуре G_0, на которой задана $f(x, y)$.

3. Производная функции области по площади. Рассмотрим снова функцию $\mu(G)$, т. е. некоторое распределение масс по плоскости. Если G — квадрируемая область и $S(G)$ — ее площадь, то отношение

$$\frac{\mu(G)}{S(G)} \tag{1.16}$$

---

*) Отсюда, в частности, следует, что если G имеет площадь нуль, то $F(G)=0$. Это означает, что мы рассматриваем лишь массы, распределенные с некоторой двумерной плотностью (а не сосредоточенные в отдельных точках или на отдельных линиях).

представляет собой среднюю плотность распределения массы в данной области G. Будем теперь уменьшать размеры области G, стягивая ее к некоторой фиксированной точке p_0. Если при этом отношение (1.16) стремится к некоторому пределу $\rho(p_0)$, то этот предел называется *плотностью распределения масс* в данной точке p_0. Таким образом, распределение масс по плоскости можно задавать непосредственно с помощью аддитивной функции области $\mu(G)$, а можно его характеризовать и соответствующей плотностью.

Перейдем теперь от нашего конкретного примера (распределения масс) к произвольной функции области. В отличие от рассмотренного выше примера — массы, произвольная функция области может принимать как положительные, так и отрицательные значения.

Пусть $F(G)$ — некоторая аддитивная функция области, определенная для всех квадрируемых областей *). Мы скажем, что число A есть *предел* отношения

$$\frac{F(G)}{S(G)}$$

($S(G)$ — как обычно, площадь области G) при стягивании области G к точке p_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что

$$\left|\frac{F(G)}{S(G)} - A\right| < \varepsilon$$

для всякой области G, целиком помещающейся в круге радиуса δ с центром в точке p_0.

Этот предел мы будем обозначать символом

$$\lim_{G \to p_0} \frac{F(G)}{S(G)} \quad \text{или} \quad \frac{dF}{ds}$$

и называть *производной аддитивной функции* $F(G)$ *по площади*. Эта производная представляет собой, очевидно, уже функцию в обычном смысле, т. е. переменную величину, зависящую от точки.

Возвращаясь к нашему примеру, можно сказать, что плотность $\rho(p_0)$ распределения масс по плоскости есть производная по площади от массы.

4. Производная по площади от двойного интеграла. Из теоремы о среднем для двойных интегралов (см. § 2, п. 4, свойство 6) вытекает следующий результат. Пусть

$$F(G) = \iint_G f(x, y)\, ds, \tag{1.17}$$

*) Или для всех квадрируемых областей, содержащихся в некоторой фиксированной области.

где $f(x, y)$ — некоторая фиксированная функция, которую мы предположим непрерывной во всей рассматриваемой части плоскости. Покажем, что аддитивная функция области $F(G)$, определенная равенством (1.17), имеет производную по площади и эта производная совпадает с подынтегральной функцией $f(x, y)$.

Действительно, пусть p_0 — некоторая фиксированная точка, G — область, лежащая в некотором круге с центром в p_0, и m, M — соответственно точная нижняя и точная верхняя грани значений функции $f(x, y)$ в области G. По теореме о среднем

$$m \leqslant \frac{1}{S(G)} \iint\limits_G f(x, y)\, ds \leqslant M.$$

При стягивании области G к точке p_0, т. е. при стремлении радиуса круга к нулю, числа m и M стремятся (в силу непрерывности $f(x, y)$ в точке p_0) к одной и той же величине, а именно к значению функции $f(x, y)$ в этой точке. Следовательно, к этому пределу стремится и заключенное между ними отношение. Итак, действительно,

$$\frac{dF}{ds} = f(x, y).$$

5. Восстановление аддитивиой функции области по ее производной. Выше мы говорили о нахождении производной от функции области. Сейчас мы рассмотрим обратную задачу: дана функция точки $f(x, y)$; найти такую функцию области $F(G)$, производная которой совпадала бы с $f(x, y)$. Считая $f(x, y)$ непрерывной, мы сразу можем указать одну такую функцию области, а именно двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\, ds \tag{1.18}$$

(рассматриваемый как функция от G). Естественно поставить вопрос: существуют ли какие-либо другие аддитивные функции области, имеющие ту же самую производную. Покажем, что если $f(x, y)$ непрерывна, то существует лишь одна аддитивная функция области, имеющая $f(x, y)$ своей производной (и представимая, следовательно, двойным интегралом (1.18)).

Если $F_1(G)$ и $F_2(G)$ — две аддитивные функции области, имеющие одну и ту же производную по площади, то

$$\frac{d}{ds}(F_1 - F_2) \equiv 0.$$

Поэтому нам достаточно показать следующее:

Если $\frac{dF}{ds}\equiv 0$, *то* $F\equiv 0$. Это в свою очередь вытекает из следующей леммы:

Лемма. *Если в ограниченной замкнутой области D производная $\frac{dF}{ds}$ аддитивной функции области $F(D)$ существует и неотрицательна, то $F(D)\geqslant 0$.*

Доказательство. Предположим противное, т. е. пусть $F(D)<0$. Тогда найдется такое $l<0$, что

$$\frac{F(D)}{S(D)}\leqslant l<0,$$

т. е.

$$F(D)\leqslant lS(D). \tag{1.19}$$

Далее, выберем последовательность положительных чисел ε_1, $\varepsilon_2, \ldots$, сходящуюся к нулю, и разобьем область D на конечное число частей D_i, диаметр каждой из которых меньше ε_1. По крайней мере для одной из этих частей, обозначим ее $D^{(1)}$, должно выполняться условие

$$F\left(D^{(1)}\right)\leqslant lS\left(D^{(1)}\right),$$

так как если бы для всех D_i выполнялось противоположное неравенство

$$F(D_i)>lS(D_i),$$

то, просуммировав эти неравенства по всем D_i, мы пришли бы к противоречию с неравенством (1.19).

Далее, разобьем $D^{(1)}$ на части, диаметр каждой из которых меньше чем ε_2. Среди них найдется хотя бы одна, обозначим ее $D^{(2)}$, для которой выполнено неравенство

$$F\left(D^{(2)}\right)\leqslant lS\left(D^{(2)}\right).$$

Продолжив этот процесс, мы получим последовательность $\left\{\overline{D}^{(n)}\right\}$ вложенных друг в друга замкнутых ограниченных областей, диаметры которых стремятся к нулю ($\overline{D}^{(n)}$ означает замыкание $D^{(n)}$, при этом $F\left(\overline{D}^{(n)}\right)=F\left(D^{(n)}\right)$). Но тогда существует точка, обозначим ее p_0, принадлежащая всем $\overline{D}^{(n)}$ *). Так как, по предположению, производная $\frac{dF}{ds}$ существует всюду, в частности и в точке p_0, то ее значение в этой точке может быть представлено как

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F\left(D^{(n)}\right)}{S\left(D^{(n)}\right)}. \tag{1.20}$$

*) Это — двумерный аналог леммы о вложенных сегментах, см. вып. 1, гл. 3, § 3.

Но по построению последовательности $D^{(n)}$ отношение $\frac{F(D^{(n)})}{S(D^{(n)})}$ при всех n не превосходит фиксированного отрицательного числа l, поэтому предел (1.20) не может быть неотрицателен. Лемма доказана.

Заменив $F(G)$ на $-F(G)$ и воспользовавшись доказанной леммой, получим, что если $\frac{dF}{ds}$ существует и неположительна, то $F(D) \leqslant 0$. Наконец, если

$$\frac{dF}{ds} = 0,$$

т. е. если одновременно

$$\frac{dF}{ds} \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \frac{dF}{ds} \leqslant 0,$$

то $F(D) = 0$ для всякой замкнутой ограниченной области.

6. Определенный интеграл как функция области. Сравним изложенные сейчас факты с тем положением, которое существует для функций одного независимого переменного. Определенный интеграл

$$\int_a^b f(\xi)\, d\xi$$

можно рассматривать (при фиксированной функции f) как функцию от сегмента $[a, b]$, т. е. как функцию области на прямой, причем, в силу известных свойств определенного интеграла, это будет аддитивная функция. Но сегмент определяется двумя точками — своими концами. Если же один его конец, скажем левый, считать фиксированным, то функция сегмента сводится к обычной функции точки. Именно так и поступают, рассматривая интеграл

$$\int_a^x f(\xi)\, d\xi \tag{1.21}$$

(при фиксированном a) как функцию верхнего предела. При этом, выбрав вместо нижнего предела a какую-либо иную точку a', мы изменим функцию (1.21) на постоянное (т. е. не зависящее от x) слагаемое, а именно на величину

$$\int_a^{a'} f(\xi)\, d\xi.$$

Таким образом, интеграл от функции одного переменного представляет собой однозначно определенную функцию области на прямой. Эту функцию, рассматриваемую на сегментах, можно свести к функции одной переменной, определенной с точностью до произвольного постоянного слагаемого. Изложенные в этом параграфе теоремы о производной двойного интеграла по площади и о восстановлении функции области по ее производной представляют собой двумерные аналоги теорем о производной определенного интеграла от непрерывной функции по верхнему пределу и о том, что первообразная определяется по функции однозначно, с точностью до постоянного слагаемого.

7. Продолжение функций области по аддитивности. Если некоторая функция задана не всюду, где она может быть определена, то ее обычно можно продолжить, если известны те или иные ее свойства. Например, если известно, что функция $f(x)$ линейна, т. е. имеет вид

$$f(x) = ax + b,$$

то достаточно знать ее значения в двух точках для того, чтобы определить ее значение всюду. Если же функция $f(x)$ периодическая, т. е. обладает тем свойством, что при некотором T

$$f(x+T) = f(x)$$

для всех x, то достаточно знать значения этой функции на отрезке $[0, T]$ для того, чтобы определить ее значения всюду (например, зная $\sin x$ для всех x от 0 до 2π, мы можем найти синус любого угла). Аналогично обстоит дело и с функциями области. Если известно, что функция области $F(G)$ аддитивна, то, зная ее значения на некотором классе областей, мы можем во многих случаях однозначно продолжить ее (с сохранением свойства аддитивности) на некоторый более широкий класс областей. Например, пусть $F(G)$ — аддитивная функция области, определенная на всех треугольниках. Тогда ее можно продолжить «по аддитивности» на все многоугольники (а затем и на более широкий класс областей).

Фактически именно с такой задачей о продолжении функции области по аддитивности мы имели дело в § 1, где рассматривалось понятие площади. Площадь представляет собой аддитивную функцию области, которую мы считали определенной на многоугольниках (или на многоугольных фигурах) и затем продолжали, с сохранением аддитивности, на более широкий класс фигур, которые мы назвали квадрируемыми. Общая задача о продолжении аддитивных функций «по аддитивности», о нахождении того возможно более широкого класса фигур, на который такое продолжение возможно, и т. д. играет важную роль во многих вопросах математики.

К сожалению, мы не имеем возможности излагать здесь эти вопросы: это потребовало бы от нас введения и систематического использования идей и понятий общей теории меры.

§ 4. Некоторые физические и геометрические применения двойных интегралов

1. Вычисление объемов. В самом начале этой главы мы уже рассматривали одну геометрическую задачу, лежащую в основе понятия двойного интеграла, а именно задачу о вычислении объема криволинейного цилиндра. Мы видели, что для цилиндра, ограниченного снизу замкнутой областью G, а сверху поверхностью $z = f(x, y)$, где $f(x, y)$ — неотрицательная непрерывная функция, приближенное значение объема дается интегральной суммой

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i. \tag{1.22}$$

(Сумма берется по всем элементам G_i разбиения фигуры G на квадрируемые части; ΔS_i — площадь элемента G_i; $(\xi_i, \eta_i) \in G_i$.) Как уже говорилось во введении к этой главе, точное значение объема — это