7. Продолжение функций области по аддитивности. Если некоторая функция задана не всюду, где она может быть определена, то ее обычно можно продолжить, если известны те или иные ее свойства. Например, если известно, что функция $f(x)$ линейна, т. е. имеет вид

$$f(x)=ax+b,$$

то достаточно знать ее значения в двух точках для того, чтобы определить ее значение всюду. Если же функция $f(x)$ периодическая, т. е. обладает тем свойством, что при некотором T

$$f(x+T)=f(x)$$

для всех x, то достаточно знать значения этой функции на отрезке $[0, T]$ для того, чтобы определить ее значения всюду (например, зная $\sin x$ для всех x от 0 до 2π, мы можем найти синус любого угла). Аналогично обстоит дело и с функциями области. Если известно, что функция области $F(G)$ аддитивна, то, зная ее значения на некотором классе областей, мы можем во многих случаях однозначно продолжить ее (с сохранением свойства аддитивности) на некоторый более широкий класс областей. Например, пусть $F(G)$ — аддитивная функция области, определенная на всех треугольниках. Тогда ее можно продолжить «по аддитивности» на все многоугольники (а затем и на более широкий класс областей).

Фактически именно с такой задачей о продолжении функции области по аддитивности мы имели дело в § 1, где рассматривалось понятие площади. Площадь представляет собой аддитивную функцию области, которую мы считали определенной на многоугольниках (или на многоугольных фигурах) и затем продолжали, с сохранением аддитивности, на более широкий класс фигур, которые мы назвали квадрируемыми. Общая задача о продолжении аддитивных функций «по аддитивности», о нахождении того возможно более широкого класса фигур, на который такое продолжение возможно, и т. д. играет важную роль во многих вопросах математики.

К сожалению, мы не имеем возможности излагать здесь эти вопросы: это потребовало бы от нас введения и систематического использования идей и понятий общей теории меры.

§ 4. Некоторые физические и геометрические применения двойных интегралов

1. Вычисление объемов. В самом начале этой главы мы уже рассматривали одну геометрическую задачу, лежащую в основе понятия двойного интеграла, а именно задачу о вычислении объема криволинейного цилиндра. Мы видели, что для цилиндра, ограниченного снизу замкнутой областью G, а сверху поверхностью $z=f(x, y)$, где $f(x, y)$ — неотрицательная непрерывная функция, приближенное значение объема дается интегральной суммой

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\,\Delta S_i. \tag{1.22}$$

(Сумма берется по всем элементам G_i разбиения фигуры G на квадрируемые части; ΔS_i — площадь элемента G_i; $(\xi_i, \eta_i)\in G_i$.) Как уже говорилось во введении к этой главе, точное значение объема — это предел, к которому стремятся интегральные суммы (1.22) при неограниченном измельчении разбиения фигуры G. Но предел сумм (1.22) — это двойной интеграл от функции $f(x, y)$ по G. Его существование (при указанных выше предположениях об $f(x, y)$ и G) было доказано (теорема 1.3). Итак, объем V криволинейного цилиндра, ограниченного снизу замкнутой областью G, а сверху поверхностью $z=f(x, y)$ (f непрерывна), представляется двойным интегралом

$$\iint_G f(x, y)\, ds.$$

На самом деле объем криволинейного цилиндра следует *определить* как значение этого интеграла. Ведь само понятие объема, хотя и ясное геометрически, заранее не определено. Строго говоря, приведенные рассуждения показывают лишь, что такое определение естественно и хорошо согласуется с нашей геометрической интуицией.

Рассмотрим еще некоторые задачи, в которых находит применение понятие двойного интеграла.

2. Вычисление площадей. Полагая в двойном интеграле подынтегральную функцию $f(x, y)$ тождественно равной 1, мы получим интеграл

$$\iint_G ds, \tag{1.23}$$

равный, очевидно, площади фигуры G (поскольку этой площади будет равна каждая из интегральных сумм, отвечающих интегралу (1.23)). Формула

$$S=\iint_G ds \tag{1.24}$$

для вычисления площади часто бывает удобнее, чем формула

$$S=\int_a^b f(x)\, dx,$$

выражающая площадь криволинейной трапеции, поскольку формула (1.24) применима не только к криволинейным трапециям, но и к любым квадрируемым фигурам, расположенным произвольным образом по отношению к координатным осям.

3. Масса пластинки. Рассмотрим на плоскости xy материальную пластинку, т. е. некоторую область G, по которой распределена масса с плотностью $\rho(x, y)$. Вычислим по заданной плотности $\rho(x, y)$ массу этой пластинки, считая, что $\rho(x, y)$ — непрерывная функция от x и y. Разобьем G каким-либо образом на части G_i и в каждой из этих частей выберем некоторую точку (ξ_i, η_i). Массу каждого такого элемента G_i можно считать равной приближенно $\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$ (где ΔS_i — площадь G_i), а масса всей пластинки приближенно равна сумме

$$\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i, \tag{1.25}$$

взятой по всем элементам разбиения. Для получения точного значения массы пластинки нужно перейти в этой сумме к пределу, неограниченно измельчая разбиение $\{G_i\}$ области G. При этом сумма (1.25) переходит в двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y)\, ds, \tag{1.26}$$

который и представляет собой массу пластинки.

Ясно, что нахождение массы пластинки по плотности есть частный случай задачи о восстановлении функции области по ее производной по площади, которую мы рассматривали в предыдущем параграфе.

4. Координаты центра масс пластинки. Найдем координаты центра масс пластинки, занимающей в плоскости xy некоторую область G. Пусть $\rho(x, y)$ — плотность этой пластинки в точке (x, y). Разбив область G на части G_i, выберем в каждой из этих частей некоторую точку (ξ_i, η_i) и будем приближенно считать массу каждой из частей пластинки равной $\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, где ΔS_i — площадь частичной области G_i. Если считать, что каждая из этих масс сосредоточена в одной точке, а именно в точке (ξ_i, η_i), то для координат x_c и y_c центра масс такой системы материальных точек получаются следующие выражения:

$$x_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \xi_i \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i}; \qquad y_c = \frac{\sum\limits_{i=1}^{n} \eta_i \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i}{\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i}, \tag{1.27}$$

которые представляют собой приближенные значения координат центра масс пластинки. Чтобы получить точные значения этих координат, нужно в формулах (1.27) перейти к пределу, неограниченно измельчая разбиение области G. При этом стоящие в формулах (1.27) суммы перейдут в соответствующие интегралы и мы получим, что координаты центра масс пластинки определяются формулами:

$$x_c = \frac{\iint\limits_G x\rho(x, y)\, ds}{\iint\limits_G \rho(x, y)\, ds}; \qquad y_c = \frac{\iint\limits_G y\rho(x, y)\, ds}{\iint\limits_G \rho(x, y)\, ds}. \tag{1.28}$$

Если пластинка однородна, т. е. $\rho = \text{const}$, то формулы для координат центра масс имеют более простой вид:

$$x_c = \frac{\iint\limits_G x\,ds}{\iint\limits_G ds}; \quad y_c = \frac{\iint\limits_G y\,ds}{\iint\limits_G ds}, \tag{1.29}$$

5. Моменты инерции пластинки. Как известно, момент инерции материальной точки относительно некоторой оси равен произведению массы точки на квадрат ее расстояния от этой оси, а момент инерции системы материальных точек (относительно одной и той же оси) равен сумме моментов инерций, составляющих эту систему масс. Пусть область G плоскости xy занята пластинкой, имеющей плотность $\rho(x, y)$. Разбив область G на части G_i, площади которых равны ΔS_i, и выбрав в каждой из этих частей некоторую точку (ξ_i, η_i), заменим нашу пластинку системой масс $\rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i$, лежащих в точках (ξ_i, η_i). Момент инерции такой системы точечных масс относительно оси y равен

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i^2 \rho(\xi_i, \eta_i)\Delta S_i.$$

Это выражение мы принимаем за приближенное значение момента инерции пластинки, тем более точное, чем мельче взятое разбиение. Переходя здесь к пределу при неограниченном измельчении разбиения области G, получим для момента инерции пластинки относительно оси y следующую формулу:

$$I_y = \iint\limits_G x^2 \rho(x, y)\,ds. \tag{1.30}$$

Аналогично момент инерции пластинки относительно оси x равен

$$I_x = \iint\limits_G y^2 \rho(x, y)\,ds. \tag{1.31}$$

Найдем еще момент инерции I_0 пластинки относительно начала координат. Приняв во внимание, что момент инерции материальной точки с массой m относительно начала координат равен

$$m(x^2 + y^2)$$

и воспользовавшись рассуждениями, аналогичными проведенным выше, получим, что

$$I_0 = \iint\limits_G (x^2 + y^2)\rho(x, y)\,ds,$$

т. е.

$$I_0 = I_x + I_y.$$

6. Световой поток, падающий иа пластинку. Пусть пластинка, лежащая в плоскости xy, освещена точечным источником света, находящимся в точке с координатами $(0, 0, z_0)$. Его силу света (одинаковую по всем направлениям) обозначим I. Вычислим световой поток, падающий на пластинку. Световой поток dF, падающий на элементарную площадку ds, равен $I\,d\omega$, где $d\omega$ — телесный угол, под которым видна площадка ds из точки $(0, 0, z_0)$. В свою очередь $d\omega$ равняется площади площадки ds, деленной на квадрат расстояния до источника и умноженной на косинус угла между нормалью к площадке и направлением на источник. Освещенностью $A(x, y)$ пластинки в точке (x, y) называется величина $\frac{dF}{ds}$. Из сказанного выше следует, что

$$A(x, y) = \frac{dF}{ds} = \frac{I\,d\omega}{ds} = \frac{Iz_0}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

Полный световой поток, падающий на пластинку, равен двойному интегралу от $A(x, y)$ по области G, занимаемой пластинкой, т. е. равен

$$Iz_0 \iint_G \frac{ds}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}.$$

7. Поток жидкости через поперечное сечение канала. Рассмотрим канал, по которому течет жидкость, и выделим некоторое сечение этого канала, перпендикулярное направлению течения. Приняв плоскость этого сечения за плоскость xy, мы можем сказать, что скорость V жидкости в каждой точке рассматриваемого сечения есть функция от x и y, т. е. $V = V(x, y)$. Вычислим количество жидкости, протекающее через это сечение в единицу времени. Рассмотрим бесконечно малый элемент площади ds этого сечения. Количество жидкости, протекающей через этот элемент в единицу времени, равно, очевидно, массе столбика с основанием ds и высотой $V(x, y)$, т. е. равно

$$\rho V(x, y)\,ds, \tag{1.32}$$

где ρ — плотность жидкости. Для получения количества жидкости, протекающего через все сечения, надо просуммировать бесконечно малые элементы (1.32), т. е. взять двойной интеграл

$$\iint_G \rho V(x, y)\,ds$$

по рассматриваемому сечению.

Замечание. Выше, в частности при рассмотрении последней задачи, мы пользовались такими выражениями, как «бесконечно малый элемент площади», «элемент массы» и т. п. Такой язык широко применяется, особенно в физической литературе. Например, обычно говорят, что для пластинки с плотностью $\rho(x, y)$ величина

$$\rho(x, y)\,ds$$

есть «элемент массы» (сосредоточенный на «элементе площади ds»), а масса этой пластинки, т. е. интеграл

$$\iint_G \rho(x, y)\,ds,$$

есть «сумма этих элементов массы».

Смысл подобных выражений состоит в том, что в них каждый раз подразумевается тот процесс предельного перехода (от конечных сумм к интегралам), который нам встречался в каждой из рассмотренных выше задач. В дальнейшем мы тоже будем пользоваться иногда этим «физическим» языком (отдавая, однако, себе ясный отчет в точном смысле того предельного перехода, который за ним скрывается).

§ 5. Свед́ение двойного интеграла к повторному

Мы познакомились уже с определением и основными свойствами двойного интеграла, условиями его существования и некоторыми физическими и геометрическими задачами, связанными с этим понятием. Но мы еще совсем не затрагивали вопроса о способах фактического вычисления двойных интегралов. В решении этой задачи основную роль играет теорема о том, что вычисление двойного интеграла сводится, при достаточно широких условиях, к последовательному интегрированию по каждой из переменных в отдельности. Доказательство этой теоремы и составляет содержание настоящего параграфа.

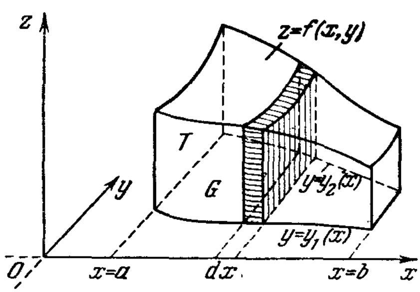

Рис. 1.13.

1. **Наводящие соображения.** Основная идея излагаемых ниже теорем состоит в следующем. Будем рассматривать двойной интеграл

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy$$

как объем криволинейного цилиндра T, ограниченного снизу областью G, сверху поверхностью $z = f(x, y)$, и сбоку цилиндрической