применяется, особенно в физической литературе. Например, обычно говорят, что для пластинки с плотностью $\rho(x, y)$ величина

$$\rho(x, y)\,ds$$

есть «элемент массы» (сосредоточенный на «элементе площади ds»), а масса этой пластинки, т. е. интеграл

$$\iint\limits_G \rho(x, y)\,ds,$$

есть «сумма этих элементов массы».

Смысл подобных выражений состоит в том, что в них каждый раз подразумевается тот процесс предельного перехода (от конечных сумм к интегралам), который нам встречался в каждой из рассмотренных выше задач. В дальнейшем мы тоже будем пользоваться иногда этим «физическим» языком (отдавая, однако, себе ясный отчет в точном смысле того предельного перехода, который за ним скрывается).

§ 5. Сведéние двойного интеграла к повторному

Мы познакомились уже с определением и основными свойствами двойного интеграла, условиями его существования и некоторыми физическими и геометрическими задачами, связанными с этим понятием.

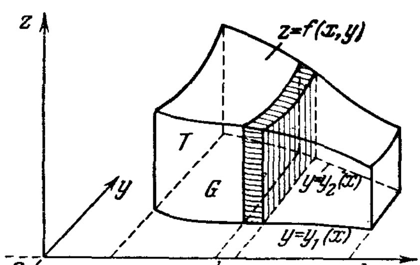

Рис. 1.13.

Но мы еще совсем не затрагивали вопроса о способах фактического вычисления двойных интегралов. В решении этой задачи основную роль играет теорема о том, что вычисление двойного интеграла сводится, при достаточно широких условиях, к последовательному интегрированию по каждой из переменных в отдельности. Доказательство этой теоремы и составляет содержание настоящего параграфа.

1. Наводящие соображения. Основная идея излагаемых ниже теорем состоит в следующем. Будем рассматривать двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$$

как объем криволинейного цилиндра T, ограниченного снизу областью G, сверху поверхностью $z=f(x, y)$, и сбоку цилиндрической поверхностью, проходящей через границу области G (рис. 1.13). Тело T можно представлять себе как составленное из бесконечно тонких слоев, параллельных плоскости yz. Объем каждого такого слоя равен

$$J(x)\,dx,$$

т. е. произведению площади $J(x)$ соответствующего сечения тела T на толщину слоя dx. Объем всего тела T при этом равен

$$\int_a^b J(x)\,dx. \tag{1.33}$$

В свою очередь величина $J(x)$ (площадь криволинейной трапеции) представляется интегралом

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy, \tag{1.34}$$

где x рассматривается как фиксированная величина, а $y_1(x)$ и $y_2(x)$ — концы того отрезка, который служит проекцией рассматриваемого сечения на плоскость xy (рис. 1.13). Комбинируя (1.33) и (1.34), получаем, что объем тела T может быть представлен в виде

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy,$$

т. е. что имеет место равенство

$$\iint_G f(x,\ y)\,ds = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x,\ y)\,dy. \tag{1.35}$$

Эта формула означает, что, представляя себе двойной интеграл как сумму элементов $f(x,\ y)\,dx\,dy$, мы можем при вычислении этой суммы сначала произвести суммирование по слоям, параллельным одной координатной оси, а потом просуммировать результаты, относящиеся к каждому слою. Алгебраическим аналогом равенства (1.35) служит формула

$$\sum_{i,\,k} a_{ik} = \sum_i \Bigl(\sum_k a_{ik}\Bigr).$$

Ясно, что, если бы мы, снова взяв некоторый криволинейный цилиндр, стали бы рассматривать его сечения, параллельные не плоскости yz, а плоскости xz, это привело бы к равенству

$$\iint_G f(x, y)\,ds = \int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$$

(рис. 1.14). Перейдем теперь от картинок к точному изложению.

2. Случай прямоугольной области. Рассмотрим сначала двойной интеграл по некоторому прямоугольнику со сторонами, параллельными осям координат.

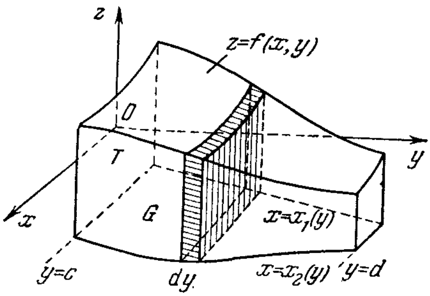

Рис. 1.14.

Теорема 1.5. *Если для функции $f(x, y)$, определенной в прямоугольнике*

$$P = \{a \leqslant x \leqslant b,\quad c \leqslant y \leqslant d\}, \tag{1.36}$$

существует двойной интеграл

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1.37}$$

а при каждом фиксированном значении x, $a \leqslant x \leqslant b$, существует однократный интеграл

$$J(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy, \tag{1.38}$$

то существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_a^b J(x)\,dx \tag{1.39}$$

и выполняется равенство

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy. \tag{1.40}$$

Доказательство. Разобьем прямоугольник P на частичные прямоугольники P_{ij}, подразделив его стороны точками $a = x_0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_k = b$ и соответственно $c = y_0 < y_1 < y_2 < \ldots < y_l = d$; таким образом, $P_{ij} = \{x_{i-1} \leqslant x \leqslant x_i,\ y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j\}$ (рис. 1.15). Пусть m_{ij} — точная нижняя грань, а M_{ij} — точная верхняя грань значений функции $f(x, y)$ в прямоугольнике P_{ij}. Выберем в каждом из промежутков $[x_{i-1}, x_i]$ произвольную точку ξ_i. Так как $m_{ij} \leqslant f(\xi_i, y) \leqslant M_{ij}$ при $y_{j-1} \leqslant y \leqslant y_j$, то

$$m_{ij}\Delta y_j \leqslant \int\limits_{y_{j-1}}^{y_j} f(\xi_i, y)\,dy \leqslant M_{ij}\Delta y_j \quad (\Delta y_j = y_j - y_{j-1}), \tag{1.41}$$

причем стоящий здесь интеграл существует, так как по предположению существует интеграл (1.38), взятый по всему отрезку $[c, d]$ при произвольном x. Суммируя неравенства (1.41) по j от 1 до l, получим

$$\sum_{j=1}^{l} m_{ij}\Delta y_j \leqslant J(\xi_i) = \int\limits_{c}^{d} f(\xi_i, y)\,dy \leqslant \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\Delta y_j.$$

Умножив каждое из этих неравенств на $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ и просуммировав по i от 1 до k, получим

$$\sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \sum_{j=1}^{l} m_{ij}\Delta y_j \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} J(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i=1}^{k} \Delta x_i \sum_{j=1}^{l} M_{ij}\Delta y_j.$$

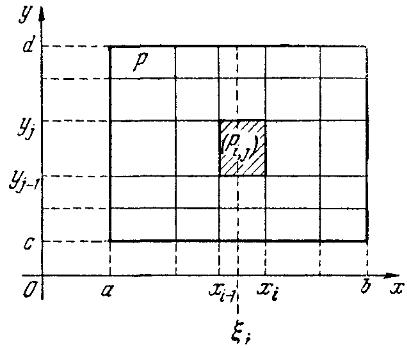

Рис. 1.15.

Посредине здесь стоит интегральная сумма, отвечающая функции $J(x)$, а слева и справа — нижняя и верхняя суммы, отвечающие двойному интегралу (1.37). Таким образом,

$$\omega \leqslant \sum_{i=1}^{k} J(\xi_i)\,\Delta x_i \leqslant \Omega.$$

Если теперь все Δx_i и Δy_k устремить к нулю, то, поскольку мы предположили существование двойного интеграла (1.37) *), как

---

*) Так как двойной интеграл (1.37) по предположению существует, то при любом способе разбиения прямоугольника P на части, таком, что максимум диаметров элементов разбиения стремится к нулю, верхняя и нижняя суммы Дарбу стремятся к общему пределу, а именно, к соответствующему двойному интегралу. Мы выбрали тот способ разбиения, который для нас наиболее удобен, а именно, с помощью систем вертикальных и горизонтальных прямых.

нижние, так и верхние интегральные суммы будут стремиться к этому двойному интегралу. Следовательно, и интегральные суммы $\sum_{i=1}^{k} J(\xi_i)\,\Delta x_i$ стремятся к тому же самому пределу. Таким образом,

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b J(x)\,dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy.$$

Меняя роли переменных x и y $\left(\text{и предполагая существование интеграла } J_1(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx\right)$, получаем аналогичное равенство

$$\int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx = \iint_P f(x, y)\,dx\,dy.$$

Наконец, если наряду с двойным интегралом (1.37) существуют оба интеграла, $J(x) = \int_c^d f(x, y)\,dy$ и $J_1(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$, то

$$\iint_P f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y)\,dy = \int_c^d dy \int_a^b f(x, y)\,dx.$$

3. Случай криволинейной области. Рассмотрим теперь вопрос о сведении двойного интеграла к повторному для случая криволинейной области. Пусть область G ограничена двумя непрерывными кривыми $y = y_1(x)$ и $y = y_2(x)$ и вертикальными отрезками $x = a$ и $x = b$ (рис. 1.16). Тогда справедлива следующая теорема:

Теорема 1.6. *Если для функции $f(x, y)$, определенной в области G, существует двойной интеграл*

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy,$$

а при каждом фиксированном значении x из $[a, b]$ существует интеграл

$$J(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

то существует повторный интеграл

$$\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$$

и выполняется равенство

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \int\limits_a^b dx \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{1.42}$$

Доказательство. Положив $c = \min y_1(x)$, $d = \max y_2(x)$, заключим область G в прямоугольник P, определяемый неравенствами $a \leqslant x \leqslant b$, $c \leqslant y \leqslant d$ (рис. 1.16), и рассмотрим в этом прямоугольнике вспомогательную функцию

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{внутри } G, \\ 0 & \text{в остальных точках.} \end{cases}$$

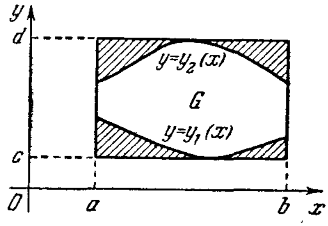

Рис. 1.16.

Функция $f^*(x, y)$ удовлетворяет условиям предыдущей теоремы. Действительно, она интегрируема в области G (так как совпадает в ней с $f(x, y)$) и интегрируема в остальной части прямоугольника P, которую мы обозначим $P - G$ (там она равна нулю). Следовательно (по свойству аддитивности интеграла, см. стр. 33—34), она интегрируема и по всему прямоугольнику P. При этом

$$\iint\limits_G f^*(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy$$

и

$$\iint\limits_{P-G} f^*(x, y)\,dx\,dy = 0,$$

откуда

$$\iint\limits_P f^*(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy. \tag{1.43}$$

Далее, при каждом значении x, лежащем между a и b, существует интеграл

$$\int\limits_c^d f^*(x, y)\,dy = \int\limits_c^{y_1(x)} f^*(x, y)\,dy + \int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y)\,dy + \int\limits_{y_2(x)}^{d} f^*(x, y)\,dy, \tag{1.44}$$

так как существует каждый из трех интегралов, стоящих справа. Действительно, отрезки $[c, y_1(x)]$ и $[y_2(x), d]$ лежат вне области G и на них $f^*(x, y)$ равна нулю, а интеграл $\int\limits_{y_1(x)}^{y_2(x)} f^*(x, y)\,dy$ совпадает с интегралом

$$\int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

существующим по условию. Первый и третий интегралы в правой части равенства (1.44) равны нулю, поэтому окончательно получаем

$$\int_c^d f^*(x, y)\,dy = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy. \tag{1.45}$$

Мы видим, что функция $f^*(x, y)$, определенная в прямоугольнике P, удовлетворяет условиям теоремы 1.5 и, следовательно, двойной интеграл от этой функции по P может быть сведен к повторному:

$$\iint_P f^*(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_c^d f^*(x, y)\,dy.$$

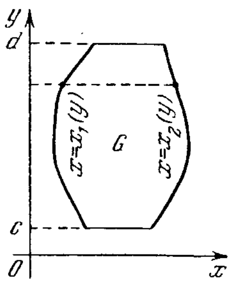

Рис. 1.17.

Отсюда и из равенств (1.43) и (1.45) получаем

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy,$$

что и требовалось доказать.

В теореме 1.6 мы рассматривали такую область G, что каждая вертикальная прямая $x = \text{const}$ пересекает ее границу не больше чем в двух точках $y_1(x)$ и $y_2(x)$, и предполагали существование интеграла

$$J(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Предположив, что каждая прямая $y = \text{const}$ пересекает границу области G не более чем в двух точках $x_1(y)$ и $x_2(y)$ (рис. 1.17), и потребовав существования интеграла $\int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$ при каждом фиксированном y, мы можем доказать существование повторного интеграла

$$\int_c^d dy \int_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$$

и его совпадение с двойным интегралом.

Как мы уже видели в самом начале этого параграфа, геометрический смысл формул, сводящих двойной интеграл к повторному, состоит в том, что объем тела равен интегралу от площади его поперечного сечения (представляющей собой функцию той переменной, которая определяет положение секущей плоскости).

Замечание 1. Если область G такова, что некоторые прямые (вертикальные или горизонтальные) пересекают ее границу более чем в двух точках, то для представления двойного интеграла, взятого по этой области, в виде повторного область G следует

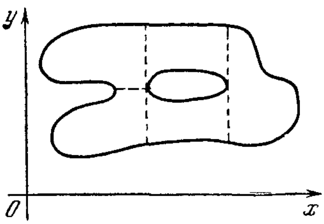

Рис. 1.18.

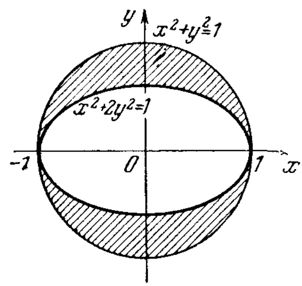

Рис. 1.19.

разбить на части, каждая из которых удовлетворяет условиям теоремы 1.6, и сводить к повторному каждый из соответствующих двойных интегралов отдельно (рис. 1.18).

Например, пусть область интегрирования G — единичный круг $x^2+y^2 \leqslant 1$, из которого вырезан эллипс $x^2+2y^2 \leqslant 1$ (рис. 1.19). Тогда двойной интеграл по G можно представить, например, так:

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy = \int_{-1}^{1} dx \int_{\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy + \int_{-1}^{1} dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{-\sqrt{\frac{1-x^2}{2}}} f(x, y)\,dy,$$

т. е. в виде суммы двух повторных интегралов.

Замечание 2. Если двойной интеграл может быть сведен как к повторному интегралу вида $\int_a^b dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)\,dy$, так и к интегралу вида $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$, то для вычисления двойного интеграла можно воспользоваться любым из этих представлений. Однако может оказаться, что одно из них значительно удобнее, чем другое, поэтому в конкретных задачах выбор того или иного порядка интегрирования (т. е. сначала по x, а потом по y, или наоборот) может быть не безразличен.

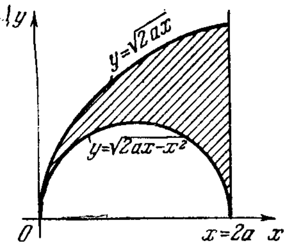

Рис. 1.20.

Пример. Записать двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy,$$

где G — область, ограниченная кривыми $y=\sqrt{2ax-x^2}$ и $y=\sqrt{2ax}$ и прямой $x=2a$ (рис. 1.20), в виде повторного (двумя способами).

Ответ. 1) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy$;

$$2)\ \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{2a} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^a dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx.$$

Во втором случае нам пришлось разбить интеграл на три слагаемых, а в первом мы обошлись одним.

§ 6. Замена переменных в двойном интеграле

К замене переменных часто приходится прибегать при интегрировании функций одной переменной. Не менее важную роль играет замена переменных и при вычислении двойных интегралов. Прежде чем заняться вопросом о замене переменных в двойном интеграле, мы должны будем изложить некоторые сведения об отображении областей.

1. Отображение областей. Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами x, y и ξ, η соответственно и предположим, что в плоскости xy выделена некоторая замкнутая ограниченная область G с границей L, а в плоскости $\xi\eta$ — замкнутая ограниченная