гралу вида $\int\limits_c^d dy \int\limits_{x_1(y)}^{x_2(y)} f(x, y)\,dx$, то для вычисления двойного интеграла можно воспользоваться любым из этих представлений. Однако может оказаться, что одно из них значительно удобнее, чем другое, поэтому в конкретных задачах выбор того или иного порядка интегрирования (т. е. сначала по x, а потом по y, или наоборот) может быть не безразличен.

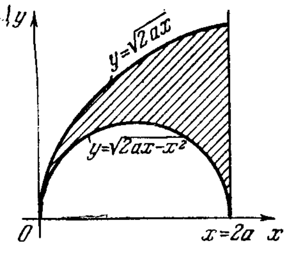

Рис. 1.20.

Пример. Записать двойной интеграл

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy,$$

где G — область, ограниченная кривыми $y=\sqrt{2ax-x^2}$ и $y=\sqrt{2ax}$ и прямой $x=2a$ (рис. 1.20), в виде повторного (двумя способами).

Ответ. 1) $\int\limits_0^{2a} dx \int\limits_{\sqrt{2ax-x^2}}^{\sqrt{2ax}} f(x, y)\,dy$;

$$2)\ \int\limits_a^{2a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{2a} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^{a} dy \int\limits_{y^2/2a}^{a-\sqrt{a^2-y^2}} f(x, y)\,dx + \int\limits_0^{a} dy \int\limits_{a+\sqrt{a^2-y^2}}^{2a} f(x, y)\,dx.$$

Во втором случае нам пришлось разбить интеграл на три слагаемых, а в первом мы обошлись одним.

§ 6. Замена переменных в двойном интеграле

К замене переменных часто приходится прибегать при интегрировании функций одной переменной. Не менее важную роль играет замена переменных и при вычислении двойных интегралов. Прежде чем заняться вопросом о замене переменных в двойном интеграле, мы должны будем изложить некоторые сведения об отображении областей.

1. Отображение областей. Рассмотрим две плоскости с декартовыми координатами x, y и ξ, η соответственно и предположим, что в плоскости xy выделена некоторая замкнутая ограниченная область G с границей L, а в плоскости $\xi\eta$ — замкнутая ограниченная область *) Г (рис. 1.21, *а* и *б*). Предположим, что в области Г определены функции

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta) \tag{1.46}$$

такие, что, когда точка (ξ, η) пробегает область Г, соответствующая точка (x, y) пробегает всю область G. Таким образом, функции (1.46) определяют отображение области Г на область G.

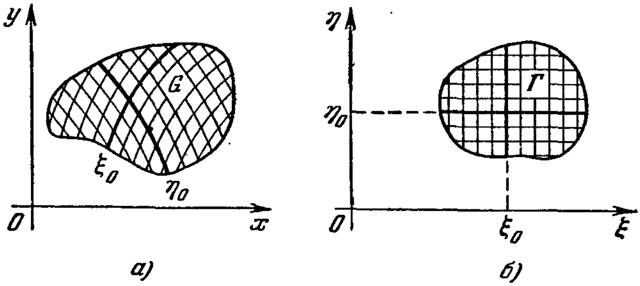

Рис. 1.21.

Мы предположим, что это отображение удовлетворяет следующим условиям:

1) Отображение *взаимно однозначно*, т. е. различным точкам области Г отвечают обязательно различные точки области G. Иными словами, мы предположим, что существуют решения

$$\xi = \xi(x, y), \quad \eta = \eta(x, y) \tag{1.47}$$

уравнений (1.46) относительно ξ и η, однозначные во всей области G.

2) *Функции* (1.46) *и* (1.47) *непрерывны и имеют непрерывные частные производные первого порядка.*

3) *Функциональный определитель* (*якобиан*)

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial x}{\partial \eta} \\ \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \tag{1.48}$$

всюду в области Г *отличен от нуля*, а следовательно, поскольку входящие в этот якобиан производные предполагаются непрерывными, *сохраняет в* Г *постоянный знак.*

Якобиан $\dfrac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ обратного отображения (1.47) связан с якобианом (1.48) соотношением

$$\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)} = 1,$$

*) Области G и Г предполагаются, конечно, квадрируемыми.

непосредственно вытекающим из определения произведения определителей и правила дифференцирования сложной функции, поэтому $\frac{D(\xi, \eta)}{D(x, y)}$ также нигде не обращается в нуль.

Если в области Г дана некоторая гладкая или кусочно-гладкая кривая

$$\xi = \xi(t), \quad \eta = \eta(t), \qquad \alpha \leqslant t \leqslant \beta,$$

то отображение (1.46) переводит ее в кривую

$$x = x(\xi(t), \eta(t)), \quad y = y(\xi(t), \eta(t)),$$

опять-таки гладкую или кусочно-гладкую, так как если производные $\frac{d\xi}{dt}$ и $\frac{d\eta}{dt}$ существуют и непрерывны, то существуют и непрерывные производные

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial x}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial x}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt} \quad \text{и} \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial y}{\partial \xi}\frac{d\xi}{dt} + \frac{\partial y}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dt},$$

причем они не обращаются в нуль одновременно, если хотя бы одна из производных $\frac{d\xi}{dt}$ и $\frac{d\eta}{dt}$ отлична от нуля $\left(\text{последнее вытекает из того, что } \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \neq 0\right)$.

В частности, граница Λ области Г переводится в границу L области G.

Это вытекает из теоремы о неявных функциях (см. вып. 1, гл. 15, § 2). Если бы точке (x_0, y_0), принадлежащей L, отвечала какая-то внутренняя точка (ξ_0, η_0) области Г, то из равенств

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

величины ξ и η определялись бы в некоторой окрестности точки (x_0, y_0) как функции от x и y. Но всякая окрестность граничной точки (x_0, y_0) содержит точки, не принадлежащие G, следовательно, у точки (ξ_0, η_0) (внутренней для Г) нашлась бы окрестность, содержащаяся в Г и не отображающаяся в область G, что противоречит условию.

2. Криволинейные координаты. Рассмотрим в области Г прямую $\xi = \xi_0$ (см. рис. 1.21). В области G ей отвечает гладкая линия, определяемая параметрическими уравнениями

$$x = x(\xi_0, \eta), \quad y = y(\xi_0, \eta) \tag{1.49}$$

(параметром служит η). Аналогично каждой прямой $\eta = \eta_0$ отвечает в области G линия, определяемая уравнениями

$$x = x(\xi, \eta_0), \quad y = y(\xi, \eta_0). \tag{1.50}$$

Линии (1.49) и (1.50) области G, в которые отображение (1.46) переводит прямые из Г, параллельные координатным осям, называются *координатными линиями* η и ξ в области G.

Из взаимной однозначности отображения

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

следует, что через каждую точку (x, y) области G проходит единственная линия вида (1.49), отвечающая постоянному значению ξ, и единственная линия вида (1.50), отвечающая постоянному значению η. Следовательно, величины ξ и η можно рассматривать как координаты (отличные, конечно, от декартовых) точек области G. Так как координатные линии (1.49) и (1.50), отвечающие этим координатам, будут, вообще говоря, кривыми (а не прямыми, как в случае декартовой координатной сетки), то величины ξ и η называются *криволинейными координатами* точек области G.

Таким образом, переменные ξ и η имеют двоякий геометрический смысл: во-первых, это — декартовы координаты точек области Γ, а во-вторых, это — криволинейные координаты точек области G. В соответствии с этим каждое соотношение вида $\Phi(\xi, \eta) = 0$ можно рассматривать как уравнение (в декартовых координатах) некоторой кривой λ, лежащей в области Γ, и как уравнение (в криволинейных координатах) кривой l, лежащей в G и являющейся образом кривой λ при отображении (1.46).

3. Полярные координаты. Наиболее употребительная система криволинейных координат на плоскости — это *полярные координаты*. Они связаны с декартовыми координатами x и y соотношениями

$$x = r\cos\varphi, \quad y = r\sin\varphi \qquad (1.51)$$
$$(r \geqslant 0;\ 0 \leqslant \varphi < 2\pi).$$

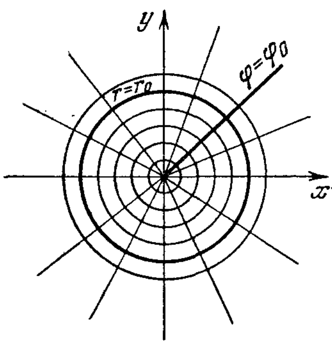

Рис. 1.22.

Координатными линиями для полярных координат служат концентрические окружности с центром в начале координат ($r = \text{const}$) и лучи, выходящие из этого центра ($\varphi = \text{const}$). Отображение (1.51) переводит полуполосу $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ в целую плоскость xy. Оно взаимно однозначно всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$, которой на плоскости $r\varphi$ отвечает полусегмент $r = 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$. Исключив точку $x = 0$, $y = 0$, мы можем рассмотреть отображение плоскости xy на полуполосу $r > 0$, обратное (1.51). Это обратное отображение непрерывно всюду, кроме положительной полуоси x, так как, хотя лежащим на ней точкам отвечает значение φ, равное нулю, но если точка M приближается к этой полуоси снизу, то соответствующее значение φ стремится не к нулю, а к 2π. Таким образом, формулы (1.51) устанавливают отображение полуполосы $r \geqslant 0$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ на плоскость xy, взаимно однозначное и в обе стороны непрерывное всюду, кроме тех точек, в которых $r = 0$ или $\varphi = 0$.

Наглядно можно представлять себе переход от полуполосы на плоскости $r\varphi$ к плоскости xy как «раскрывание веера». Мы берем полуполосу $0 \leqslant r < \infty$, $0 \leqslant \varphi < 2\pi$ и как веер развертываем ее на плоскость xy (рис. 1.23). Рис. *а* — первый кадр фильма, рис. *б* — второй кадр, рис. *в* — уже почти конец фильма, рис. *г* — это последний кадр.

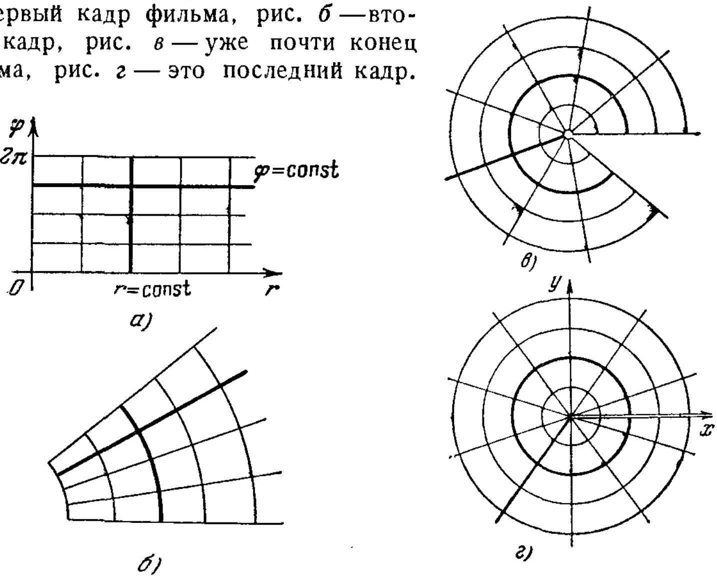

Рис. 1.23.

Например, пусть на плоскости $r\varphi$ задана прямоугольная область $0 < a \leqslant r \leqslant b$, $0 \leqslant \alpha \leqslant \varphi \leqslant \beta < 2\pi$. Наше «раскрывание веера» превращает ее в сектор кругового кольца на плоскости xy (рис. 1.24).

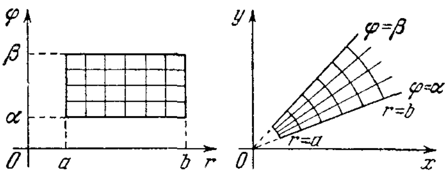

Рис. 1.24.

Вычислим якобиан перехода от декартовых координат к полярным, т. е. якобиан преобразования (1.51). Получим

$$\frac{D(x,\ y)}{D(\xi,\ \eta)} = \begin{vmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi \\ \sin\varphi & r\cos\varphi \end{vmatrix} = r.$$

Он отличен от нуля всюду, кроме точки $x = 0$, $y = 0$.

4. Постановка задачи о замене переменных в двойном интеграле. Сформулируем теперь задачу о замене переменных в двойном интеграле, о которой уже говорилось выше. Пусть G — замкнутая область, ограниченная кусочно-гладкой кривой L, и $f(x,\ y)$ — заданная в G функция, непрерывная или имеющая разрывы, лежащие на множестве площади нуль, и ограниченная. Пусть, далее функции

$$x = x(\xi, \eta), \quad y = y(\xi, \eta)$$

определяют отображение на область G некоторой области Γ, удовлетворяющее условиям 1) — 3), перечисленным в п. 1. Задача состоит в том, чтобы интеграл

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy,$$

взятый по области G, представить, преобразовав в нем подынтегральное выражение к новым переменным ξ и η, в виде интеграла по области Γ.

5. Площадь в криволинейных координатах. При выводе формулы замены переменных в двойном интеграле основной шаг состоит в том, чтобы выразить через криволинейные координаты площадь области. Здесь имеет место следующая теорема:

Теорема 1.7. *Пусть $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ — взаимно однозначное, непрерывное и непрерывно дифференцируемое отображение области Γ на область G, якобиан которого отличен от нуля. Тогда*

$$\text{пл}\, G = \iint_G dx\,dy = \iint_\Gamma \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\,d\eta. \qquad (1.52)$$

Доказательству этой теоремы мы предпошлем наглядные рассуждения, проводимые «на физическом уровне строгости». (При желании читатель может ими и ограничиться.)

Рассмотрим в области G две пары бесконечно близких координатных линий. Пусть первая из этих пар отвечает значениям

$$\xi_0 \text{ и } \xi_0 + d\xi$$

координаты ξ, а вторая пара — значениям

$$\eta_0 \text{ и } \eta_0 + d\eta$$

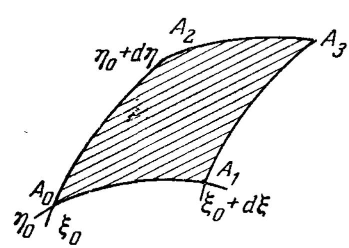

Рис. 1.25.

координаты η. Эти координатные линии вырезают в области G бесконечно малый элемент площади $A_0A_1A_3A_2$, который с точностью до малых выше первого порядка можно считать параллелограммом (рис. 1.25). Сторонами этого параллелограмма служат, очевидно, векторы

$$\overline{A_0A_1} = \left(\frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi,\ \frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi\right),$$
$$\overline{A_0A_2} = \left(\frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta,\ \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta\right).$$

Площадь ds параллелограмма $A_0A_1A_3A_2$ равна абсолютной величине детерминанта, составленного из компонент векторов $\overline{A_0A_1}$ и $\overline{A_0A_2}$, т. е.

$$ds = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi}\,d\xi & \frac{\partial y}{\partial \xi}\,d\xi \\ \frac{\partial x}{\partial \eta}\,d\eta & \frac{\partial y}{\partial \eta}\,d\eta \end{vmatrix} = \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\,d\eta. \tag{1.53}$$

А площадь S всей области G получается суммированием всех таких элементов, т. е. действительно представляется в виде двойного интеграла

$$\int\limits_{\Gamma}\int \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\,d\eta,$$

взятого по области Γ изменения переменных ξ и η.

Оформим теперь эти наглядные рассуждения в виде доказательства. При этом мы позволим себе опускать некоторые детали, которые читатель при желании легко восстановит. Кроме того, для упрощения рассуждений мы будем предполагать, что рассматриваемое отображение определено и удовлетворяет указанным в теореме условиям не только в области Γ, но и в некоторой большей области, содержащей внутри себя область Γ (вместе с границей).

Доказательство теоремы 1.7. Рассмотрим сперва тот элементарный, но, по существу, основной случай, когда рассматриваемая в плоскости $\xi\eta$ область представляет собой прямоугольник Π со сторонами, параллельными осям координат, а ее отображение на плоскость xy есть линейное отображение, определяемое формулами

$$\begin{aligned} x &= x_0 + a\xi + b\eta, \\ y &= y_0 + a_1\xi + b_1\eta, \end{aligned} \tag{1.54}$$

где x_0, y_0, a, b, a_1 и b_1 — постоянные и $\begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \neq 0$. Как известно из аналитической геометрии, образ прямоугольника Π при таком отображении будет параллелограммом (обозначим его P), площадь которого связана с площадью прямоугольника Π соотношением

$$\text{пл}\ P = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix}\ \text{пл}\ \Pi \tag{1.55}$$

(докажите это!). Отсюда следует, что любая квадрируемая фигура $\overline{\Phi}$, лежащая в плоскости $\xi\eta$, переводится линейным отображением (1.54) в квадрируемую фигуру F, площадь которой выражается так:

$$\text{пл}\, F = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} a & b \\ a_1 & b_1 \end{vmatrix} \text{пл}\, \Phi. \tag{1.56}$$

Впрочем, для дальнейшего нам понадобится лишь равенство (1.55).

Рассмотрим теперь некоторое произвольное (нелинейное) отображение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$, удовлетворяющее условиям теоремы. Возьмем в области Γ, где это отображение определено, некоторую точку (ξ_0, η_0) и рассмотрим прямоугольник

$$\xi_0 \leqslant \xi \leqslant \xi_0 + h_1, \qquad \eta_0 \leqslant \eta \leqslant \eta_0 + h_2,$$

который мы снова обозначим Π (рис. 1.26).

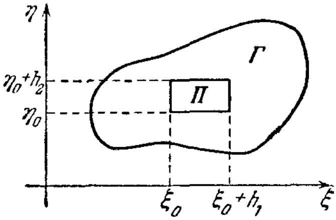

Рис. 1.26.

С помощью формулы конечных приращений запишем отображение этого прямоугольника на плоскость xy в виде

$$\begin{aligned} x &= x_0 + \frac{\partial x}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\, d\eta + \alpha_1, \\ y &= y_0 + \frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta + \alpha_2, \end{aligned} \tag{1.57}$$

где $x_0 = x(\xi_0, \eta_0)$, $y_0 = y(\xi_0, \eta_0)$, значения производных берутся в точке (ξ_0, η_0) и

$$\alpha_1 = \left(x'_\xi(\xi^*, \eta^*) - x'_\xi(\xi_0, \eta_0)\right) d\xi + \left(x'_\eta(\xi^*, \eta^*) - x'_\eta(\xi_0, \eta_0)\right) d\eta,$$

$$\alpha_2 = \left(y'_\xi(\xi^{**}, \eta^{**}) - y'_\xi(\xi_0, \eta_0)\right) d\xi + \left(y'_\eta(\xi^{**}, \eta^{**}) - y'_\eta(\xi_0, \eta_0)\right) d\eta.$$

(Здесь $\xi_0 \leqslant \xi^* \leqslant \xi$; $\xi_0 \leqslant \xi^{**} \leqslant \xi$; $\eta_0 \leqslant \eta^* \leqslant \eta$; $\eta_0 \leqslant \eta^{**} \leqslant \eta$.)

Первые производные от x и y по ξ и η по условию непрерывны, а значит, и равномерно непрерывны в замкнутой ограниченной области Γ. Следовательно, для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать число h настолько малым, что, как только $h_1 + h_2 < h$, для всех точек (ξ, η), принадлежащих прямоугольнику Π, выполняются неравенства

$$\left| x'_\xi(\xi, \eta) - x'_\xi(\xi_0, \eta_0) \right| < \varepsilon, \quad \left| x'_\eta(\xi, \eta) - x'_\eta(\xi_0, \eta_0) \right| < \varepsilon$$

и аналогично для y'_ξ и y'_η, причем ε не зависит от выбора точки (ξ_0, η_0). С помощью этих оценок получаем, что

$$|\alpha_1| < \varepsilon h, \quad |\alpha_2| < \varepsilon h. \tag{1.58}$$

Сравним теперь нелинейное отображение (1.57) с линейным отображением

$$\hat{x} = x_0 + \frac{\partial x}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial x}{\partial \eta}\, d\eta, \qquad \hat{y} = y_0 + \frac{\partial y}{\partial \xi}\, d\xi + \frac{\partial y}{\partial \eta}\, d\eta, \tag{1.59}$$

которое получается, если в формулах (1.57) отбросить α_1 и α_2. Как мы уже знаем, такое линейное отображение переводит прямоугольник Π в параллелограмм, который мы снова обозначим P, причем, согласно (1.55),

$$\text{пл}\, P = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \text{пл}\, \Pi. \tag{1.60}$$

Нелинейное отображение (1.57) переводит Π в некоторую криволинейную фигуру $\mathscr{P}$. Посмотрим, насколько ее площадь отличается от площади параллелограмма P.

В силу (1.58), для любой точки $(\xi, \eta) \in \Pi$

$$|x - \hat{x}| = |\alpha_1| < \varepsilon h, \quad |y - \hat{y}| = |\alpha_2| < \varepsilon h,$$

т. е.

$$\sqrt{(x-\hat{x})^2 + (y-\hat{y})^2} < \sqrt{2}\, \varepsilon h.$$

Иначе говоря, расстояние между образами одной и той же точки $(\xi, \eta) \in \Pi$ при линейном (1.59) и нелинейном (1.57) отображениях не превышает $\sqrt{2}\, \varepsilon h$. Поэтому если мы заключим границу параллелограмма P в полоску ширины $\sqrt{2}\, \varepsilon h$, то граница криволинейной фигуры $\mathscr{P}$ будет целиком лежать внутри этой полоски (рис. 1.27). Ясно, что пл $\mathscr{P}$ отличается от пл P не больше чем на площадь этой полоски. Элементарный подсчет показывает, что площадь такой полоски не превосходит ее ширины, умноженной на периметр параллелограмма P. Этот периметр легко оценить. Пусть M выбрано так, что во всей рассматриваемой области Γ каждая из производных $\frac{\partial x}{\partial \xi}$, $\frac{\partial x}{\partial \eta}$, $\frac{\partial y}{\partial \xi}$, $\frac{\partial y}{\partial \eta}$ не превосходит по модулю M (эти производные непрерывны, а значит, и ограничены в замкнутой ограниченной области Γ). Тогда из (1.59) сразу следует, что стороны параллелограмма P не превосходят Mh. Таким образом, периметр P не больше, чем $4Mh$, а площадь полоски, в которую мы заключили границу P, не превосходит $4\sqrt{2}\,\varepsilon M h^2$, т. е. не превосходит

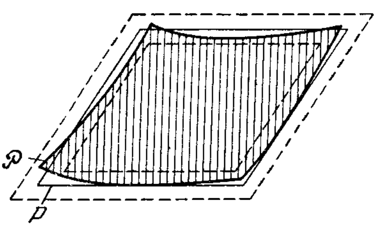

Рис. 1.27.

$$\sqrt{2}\,\varepsilon M\, \text{пл}\, \Pi.$$

Следовательно,

$$\text{пл}\, \mathscr{P} = \text{пл}\, P + \gamma,$$

или, в силу (1.60),

$$\text{пл}\, \mathscr{P} = \text{абс. вел.} \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{vmatrix} \text{пл}\, \Pi + \gamma, \tag{1.61}$$

где

$$|\gamma| < \sqrt{2}\, \varepsilon M\, \text{пл}\, \Pi. \tag{1.62}$$

Пусть теперь Φ — многоугольная фигура, лежащая внутри Γ и составленная из прямоугольников со сторонами, параллельными осям координат, а $\mathcal{F}$ — фигура, в которую она переводится отображением $x=x(\xi, \eta)$, $y=y(\xi, \eta)$. Разобьем Φ на прямоугольники Π_i, полупериметр каждого из которых меньше h. Образы $\mathcal{P}_i$ этих прямоугольников в сумме составляют фигуру $\mathcal{F}$, а площадь каждого $\mathcal{P}_i$ можно представить в виде

$$\text{пл}\,\mathcal{P}_i=\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right|_{\substack{\xi=\xi_i\\ \eta=\eta_i}} \text{пл}\,\Pi_i+\gamma_i, \tag{1.63}$$

где точка (ξ_i, η_i) принадлежит прямоугольнику Π_i и

$$|\gamma_i|<\sqrt{2}\,\varepsilon M\,\text{пл}\,\Pi_i.$$

Просуммировав равенства (1.63) по всем прямоугольникам Π_i, получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\text{пл}\,\mathcal{P}_i=\text{пл}\,\mathcal{F}=\sum_{i=1}^{n}\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right|_{\substack{\xi=\xi_i\\ \eta=\eta_i}}\text{пл}\,\Pi_i+\sum_{i=1}^{n}\gamma_i. \tag{1.64}$$

Первое слагаемое в правой части этого равенства представляет собой, очевидно, интегральную сумму, отвечающую интегралу

$$\iint\limits_{\Phi}\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta, \tag{1.65}$$

а второе не превосходит

$$\sqrt{2}\,M\varepsilon\sum_{i=1}^{n}\text{пл}\,\Pi_i=\sqrt{2}\,M\varepsilon\,\text{пл}\,\Phi,$$

где ε может быть сделано (за счет выбора достаточно мелкого разбиения фигуры Φ) сколь угодно малым. Интеграл (1.65) заведомо существует, так как подынтегральная функция непрерывна. Следовательно, мы можем в равенстве (1.64) перейти к пределу, неограниченно измельчая разбиение фигуры Φ. Получим

$$\text{пл}\,\mathcal{F}=\iint\limits_{\Phi}\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta.$$

Для завершения доказательства теоремы остается сделать переход от многоугольной фигуры Φ, погруженной в область Γ, к самой области Γ. Этот переход уже не составляет труда. Так как Γ квадрируема, то можно найти две такие фигуры Φ_1 и Φ_2, составленные из прямоугольников *), первая из которых вложена в Γ, а вторая объемлет Γ, что разность их площадей меньше заданного положительного числа δ. Отображение $x=x(\xi, \eta)$, $y(\xi, \eta)$ переводит их в две квадрируемые фигуры $\mathcal{F}_1$ и $\mathcal{F}_2$, одна из которых вложена в G, а другая объемлет G. Нетрудно показать, что

$$|\text{пл}\,\mathcal{F}_1-\text{пл}\,\mathcal{F}_2|<(2M^2+\sqrt{2}\,M\varepsilon)\,\delta$$

*) При этом объемлющая фигура Φ_2 должна лежать в той области, большей чем Γ, в которой, как мы условились, рассматриваемое отображение определено и удовлетворяет условиям теоремы.

(проделайте это, воспользовавшись равенством (1.64) и тем, что $\max\left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| < 2M^2$). Тогда тем более

$$|\text{пл}\, G - \text{пл}\, \mathcal{F}_1| < (2M^2 + \sqrt{2}\, M\varepsilon)\,\delta. \tag{1.66}$$

Но $\mathcal{F}_1$ — образ многоугольной фигуры Φ_1, следовательно, по доказанному ранее

$$\text{пл}\, \mathcal{F}_1 = \iint\limits_{\Phi_1} \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta. \tag{1.67}$$

Кроме того, по теореме о среднем

$$\left|\iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta - \iint\limits_{\Phi_1} \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta\right| = \iint\limits_{\Gamma - \Phi_1} \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta < 2M^2\delta. \tag{1.68}$$

Из (1.66) и (1.68), учитывая (1.67), получаем

$$\left|\text{пл}\, G - \iint\limits_{\Gamma} \left|\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}\right| d\xi\, d\eta\right| < (4M^2 + \sqrt{2}\, M\varepsilon)\,\delta.$$

Так как δ произвольно мало, то отсюда вытекает утверждение теоремы.

Замечание 1. Основная идея, на которую опирались как изложенное доказательство, так и приведенные выше наглядные рассуждения, состоит в том, что нелинейное отображение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ в малой области можно аппроксимировать линейным, притом тем точнее, чем меньше область. Собственно говоря, рассмотрение нелинейного функционального соотношения как линейного в бесконечно малом — это основа всего анализа.

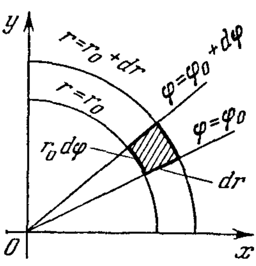

Рис. 1.28.

Пример. Рассмотрим снова полярные координаты. Линии $r = r_0$, $r = r_0 + dr$, $\varphi = \varphi_0$, $\varphi = \varphi_0 + d\varphi$ вырезают на плоскости xy бесконечно малый прямоугольник со сторонами dr и $r_0\, d\varphi$ (рис. 1.28). Поэтому элемент площади в полярных координатах равен $r_0\, d\varphi\, dr$. (Этот же результат вытекает, конечно, и из общей формулы (1.52), поскольку $\frac{D(x, y)}{D(r, \varphi)} = r$.) Следовательно, площадь в полярных координатах выражается формулой

$$S = \iint\limits_{\Gamma} r\, dr\, d\varphi, \tag{1.69}$$

где Γ — область изменения переменных r и φ. В частности, если область G ограничена двумя лучами $\varphi=\varphi_1$ и $\varphi=\varphi_2$ и кривой $r=r(\varphi)$, т. е. имеет вид, изображенный на рис. 1.29 (изобразите эту область на плоскости $r\varphi$), то, преобразовав двойной интеграл (1.69) в повторный, получим

$$S=\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} d\varphi \int_0^{r(\varphi)} r\,dr.$$

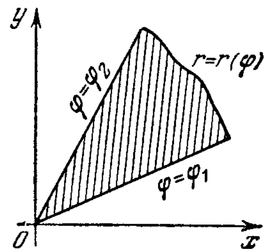

Рис. 1.29.

Выполнив здесь интегрирование по r, находим

$$S=\frac{1}{2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} r^2(\varphi)\,d\varphi.$$

Это — известная формула площади в полярных координатах (см. вып. 1, гл. 11, § 2).

Замечание 2. Из формулы (1.53) ясен геометрический смысл абсолютной величины якобиана $\frac{D(x,y)}{D(\xi,\eta)}$. Обозначим этот якобиан,

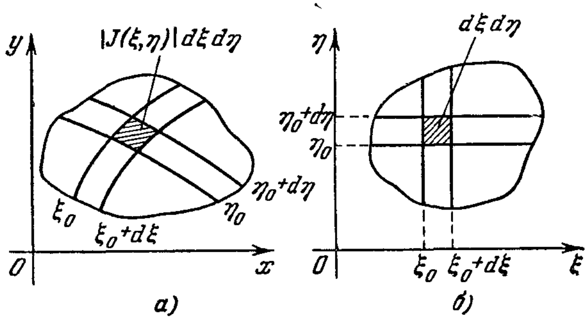

Рис. 1.30.

для сокращения записи, $J(\xi,\eta)$ и рассмотрим отображение области Γ на область G, определяемое формулами

$$x=x(\xi,\eta),\qquad y=y(\xi,\eta).$$

Это отображение переводит лежащий в Γ бесконечно малый прямоугольник (рис. 1.30), ограниченный прямыми

$$\xi=\xi_0,\quad \xi=\xi_0+d\xi,\quad \eta=\eta_0,\quad \eta=\eta_0+d\eta$$

и имеющий площадь $d\xi\,d\eta$, в параллелограмм, площадь которого равна

$$|J(\xi,\eta)|\,d\xi\,d\eta.$$

Следовательно, $|J(\xi, \eta)|$ представляет собой коэффициент растяжения площади (в точке (ξ, η)) при отображении области Γ на G.

Замечание 3. В теореме 1.7 мы предполагали, что отображение

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta)$$

области Γ на область G взаимно однозначно. Однако выражение (1.52) для площади в криволинейных координатах сохраняет силу и в том случае, если это условие нарушается в отдельных точках или вдоль отдельных линий. Рассмотрим в качестве типичного примера отображение прямоугольника $0 \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$ на круг, отвечающее введению полярных координат по формулам

$$x = r\cos\varphi, \qquad y = r\sin\varphi. \tag{1.70}$$

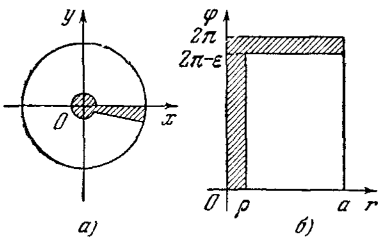

Рис. 1.31.

Это отображение удовлетворяет условиям теоремы 1.7 всюду, кроме точек, лежащих на отрезке $y = 0$, $0 \leqslant x \leqslant a$. Возьмем в плоскости $r\varphi$ прямоугольник $\rho \leqslant r \leqslant a$, $0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi - \varepsilon$, а в плоскости xy — область, отвечающую этому прямоугольнику при отображении (1.70) (рис. 1.31). Для этих областей формула (1.52) верна (так как там условия 1) — 3) выполнены). Если теперь перейти к пределу при $\rho \to 0$ и $\varepsilon \to 0$, то получим, что формула (1.52) остается справедливой и для всего рассматриваемого круга $r \leqslant a$.

Аналогичные рассуждения могут быть проведены и в общем случае произвольного отображения, взаимно однозначного всюду, кроме отдельных точек или линий.

6. Замена переменных в двойном интеграле. Полученное нами выражение (1.52) площади в криволинейных координатах позволяет легко найти и общую формулу замены переменных в двойном интеграле. Рассмотрим интеграл

$$\iint_G f(x, y)\,dx\,dy, \tag{1.71}$$

где область G ограничена кусочно-гладким контуром L, а функция $f(x, y)$ или непрерывна в этой области (включая границу) всюду, или же ограничена в ней и непрерывна всюду, кроме некоторого множества площади нуль.

Пусть функции $x = x(\xi, \eta)$ и $y = y(\xi, \eta)$ определяют соответствие между точками области G и точками некоторой области Γ, удовлетворяющее всем тем предположениям, при которых была установлена формула (1.52), выражающая площадь области G в криволинейных координатах. Разобьем область Γ на части Γ_i некоторой системой кусочно-гладких кривых. Соответствующие им кусочно-гладкие кривые разобьют область G на части G_i площади ΔS_i. Выбрав в каждой из этих частей G_i произвольную точку (x_i, y_i), составим интегральную сумму

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\,\Delta S_i, \tag{1.72}$$

отвечающую интегралу (1.71).

Применив к каждой из частичных областей G_i формулу (1.52), получим

$$\Delta S_i = \iint_{\Gamma_i} \left| \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} \right| d\xi\, d\eta.$$

Обозначив якобиан символом $J(\xi, \eta)$ вместо $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)}$ и воспользовавшись теоремой о среднем, будем иметь

$$\Delta S_i = \left| J(\xi_i^*, \eta_i^*) \right| \Delta\sigma_i,$$

где $\Delta\sigma_i$ — площадь области Γ_i. Заменив в интегральной сумме (1.72) каждую из величин ΔS_i найденным выражением, получим

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i) \left| J(\xi_i^*, \eta_i^*) \right| \Delta\sigma_i.$$

Точка (ξ_i^*, η_i^*) получается в результате применения теоремы о среднем, и выбор ее в каждой из частичных областей Γ_i от нас не зависит. Напротив, точка (x_i, y_i) выбирается в каждой из частичных областей G_i совершенно произвольно. Поэтому мы можем положить

$$x_i = x(\xi_i^*, \eta_i^*), \qquad y_i = y(\xi_i^*, \eta_i^*),$$

т. е. выбрать ту точку области G_i, которая соответствует точке (ξ_i^*, η_i^*) области Γ_i. Тогда рассматриваемая интегральная сумма примет вид

$$\sum_{i=1}^{n} f\left(x(\xi_i^*, \eta_i^*),\ y(\xi_i^*, \eta_i^*)\right) \left| J(\xi_i^*, \eta_i^*) \right| \Delta\sigma_i,$$

а это не что иное, как интегральная сумма для интеграла

$$\iint_{\Gamma} f(x(\xi, \eta),\ y(\xi, \eta)) \left| J(\xi, \eta) \right| d\xi\, d\eta. \tag{1.73}$$

Этот интеграл существует, так как подынтегральная функция в области Γ либо непрерывна, либо ограничена и непрерывна в Γ всюду, кроме точек некоторого множества, имеющего площадь нуль. Если теперь неограниченно измельчать разбиение области Γ на части Γ_i, то, в силу непрерывности соответствия, диаметры областей G_i также будут стремиться к нулю. При этом рассматриваемая интегральная сумма должна стремиться, с одной стороны, к двойному интегралу (1.71), а с другой — к интегралу (1.73). Следовательно, эти интегралы равны

$$\iint\limits_G f(x, y)\,dx\,dy = \iint\limits_\Gamma f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta))\,|J(\xi, \eta)|\,d\xi\,d\eta. \quad (1.74)$$

Это и есть формула замены переменных в двойном интеграле.

Итак, *если G — замкнутая ограниченная область с кусочно-гладкой границей и $f(x, y)$ — заданная в этой области функция, непрерывная всюду или же ограниченная и непрерывная всюду, кроме некоторого множества площади нуль, и если формулы*

$$x = x(\xi, \eta), \qquad y = y(\xi, \eta)$$

устанавливают соответствие между точками области G и точками некоторой области Γ в плоскости $\xi\eta$, удовлетворяющее условиям 1) — 3) п. 1, *то имеет место формула замены переменных* (1.74).

Равенство (1.74) справедливо и в тех случаях, когда условия взаимной однозначности, непрерывности и непрерывной дифференцируемости соответствия между областями G и Γ нарушаются в отдельных точках или вдоль конечного числа кривых площади нуль.

В двойном интеграле, как и в однократном, замена переменных — важнейший способ приведения интеграла к виду, более удобному для его вычисления. Необходимо, однако, подчеркнуть, что в случае двух переменных возникает одно новое обстоятельство. В то время как для однократного интеграла замена переменных делается лишь с целью упрощения подынтегрального выражения, при вычислении двойных интегралов стремятся упростить не только интегрируемую функцию, но и ту область, по которой берется интеграл. Последнее обстоятельство настолько важно, что иногда имеет смысл пойти даже на некоторое усложнение подынтегральной функции, но зато получить простую область интегрирования.

Пример. Вычислить $\iint\limits_G dx\,dy$, где G — область, ограниченная эллипсом $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$. Здесь подынтегральная функция тождественно равна 1, т. е. является простейшей из всех возможных. Однако для вычисления этого интеграла все же имеет смысл сделать замену переменных, положив

$$x = a\rho\cos\varphi, \quad y = b\rho\sin\varphi. \tag{1.75}$$

Якобиан такого преобразования равен $ab\rho$. Область интегрирования при этом переходит в прямоугольник

$$0 \leqslant \varphi < 2\pi, \quad 0 \leqslant \rho \leqslant 1.$$

Переходя к новым переменным и записывая двойной интеграл в виде повторного, получаем

$$\int\limits_G\int dx\,dy = ab\int\limits_0^{2\pi} d\varphi \int\limits_0^1 \rho\,d\rho = \pi ab.$$

Упражнения. 1. Вычислить площадь области, ограниченной кривыми $xy = 1$, $xy = 2$, $y = x^2$, $y = 2x^2$.

Указание. Принять за новые переменные

$$\xi = xy, \quad \eta = \frac{y}{x^2}. \tag{1.76}$$

2. Нарисовать сети координатных линий, отвечающие заменам (1.75) и (1.76).

7. Сравнение с одномерным случаем. Интеграл по ориентированной области. Формула (1.74) аналогична формуле замены переменной в определенном интеграле

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\,x'(t)\,dt \tag{1.77}$$

с той только разницей, что в случае одной переменной берется не модуль производной $x'(t)$ (играющей здесь роль якобиана), а сама эта производная. Причина этого различия состоит в том, что определенный интеграл $\int\limits_a^b f(x)\,dx$ берется по ориентированному отрезку $[a, b]$ и при перестановке пределов меняет знак, а двойной интеграл берется по неориентированной области. Если бы мы условились в определенном интеграле пределы интегрирования всегда ставить так, чтобы нижний предел был не больше верхнего, то формула (1.77) (где $x = x(t)$ — монотонная функция) приняла бы вид

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \int\limits_\alpha^\beta f(x(t))\,|x'(t)|\,dt. \tag{1.78}$$

(Проверьте это!)

С другой стороны, можно было бы в случае двойных интегралов ввести понятие ориентации области и приписывать площади такой области знак плюс или минус.

За ориентацию области принимается выбор определенной ориентации (направления обхода) ее границы. Именно, область называется ориентированной положительно, если при движении по ее границе область остается слева от наблюдателя (рис. 1.32). В противоположном случае область называется ориентированной отрицательно. Если площадь области G (неориентированной) равна S, то площадь этой области, взятой с положительной ориентацией, положим равной опять-таки S, а площадь отрицательно ориентированной области G будем считать равной $-S$. Можно показать, что отображение $x = x(\xi, \eta)$, $y = y(\xi, \eta)$ области Γ на G сохраняет ориентацию, если его якобиан положителен, и меняет ориентацию, если $\frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} < 0$. Поэтому формула, представляющая в криволинейных координатах *площадь ориентированной области* G, имеет вид

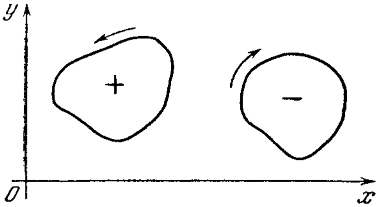

Рис. 1.32.

$$S = \iint\limits_{\Gamma} \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} d\xi\, d\eta \quad \text{(без знака модуля);}$$

аналогично меняется и формула (1.74).